UFMG

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS

Modelagem e Aplicações do Cálculo Vetorial e Equações Diferenciais nas Ciências Exatas e Engenharia

Autores:
Bernardo Basques Quintão
Marina Magalhães dos Santos Amaral
Victor Ferreira de Araújo Santos

Dezembro 2025

Victor Ferreira de Araújo Santos
Bernardo Basques Quintão
Marina Magalhães dos Santos Amaral

Modelagem e Aplicações do Cálculo Vetorial e Equações Diferenciais nas Ciências Exatas e Engenharia

Esse trabalho foi escrito por Bernardes Basques e Marina Amaral como uma extensão da Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 3, lecionada no primeiro semestre de 2025, pelo Prof. Victor Ferreira.

Belo Horizonte - MG, 2025

Sumário

1 Modelando situações da Natureza com Equações Diferenciais. 3
1.1 Modelagem com equações de 1º ordem. 3
1.1.1 O problema da Braquistócrona 26
1.1.2 Reações Químicas 30
1.2 Modelagem com equações de 2º ordem. 33

2 Cálculo Vetorial: Alguns problemas exóticos 36

3 Ondas de água 54
3.1 Equações de Stokes 54
3.2 Ondas na superfície livre 60
3.3 Equação de Bernoulli 61
3.4 O fenômeno da dispersão 62
3.4.1 Dispersão em águas rasas 68
3.4.2 Dispersão em águas profundas 69
3.5 Dedução da KdV 70
3.5.1 Solução da KdV 79
3.5.2 Algumas propriedades da KdV 84

4 Ciência dos materiais 91
Introdução 91
4.1 Classificação e organização estrutural dos materiais 91
4.2 Tensão, deformação e comportamento mecânico 92
4.3 Resistência, fratura e comportamento de materiais cerâmicos 96
4.3.1 Diferença entre deflexão e resistência à flexão 97

Introdução

Concebido como uma iniciativa de divulgação acadêmica, no presente trabalho serão abordados tópicos de matemática abordados durante o ciclo básico de cursos de engenharia e, a partir destes, entender sua importância em aplicações mais próximas do mundo real, desmistificando a transição da teoria para a prática e servindo como um sólido material de apoio complementar para os estudos. Assim, parte-se de exemplos didáticos que utilizam equações diferenciais ordinárias para evidenciar a capacidade destas de modelar o mundo real. A partir dos exemplos práticos, são abordados alguns problemas reais (notoriamente o problema da Braquistócrona e o comportamento de reações químicas). Adiante, o mesmo é feito com noções de cálculo vetorial - partindo de exercícios mais simples até problemas mais complexos.

Com esses conhecimentos e técnicas abordadas nessa primeira parte (capítulos 1 e 2), é possível abordar problemas mais desafiadores no âmbito da mecânica dos fluídos (capítulo 3), com a dedução e solução da equação de Korteweg–De Vries, e no âmbito da ciência dos materiais (capítulo 4), tratando detalhadamente de seu comportamento mecânico e resistência.

Sugestões, dúvidas e colaborações entrar em contato com o email: modelagemtz1@gmail.com

Capítulo 1

Modelando situações da Natureza com Equações Diferenciais.

1.1 Modelagem com equações de 1º ordem.

Exemplo 1.1 (Mistura de sal em um tanque) No instante $t = 0$, um tanque contém Q_0 libras de sal dissolvido em 100 galões de água; veja a figura 1.1. Suponha que está entrando no tanque, a uma taxa de r galões por minuto, água contendo $\frac{1}{4}$ de libra de sal por galão, e que a mistura bem mexida está saindo do tanque à mesma taxa. Escreva o problema de valor inicial que descreve esse fluxo. Encontre a quantidade de sal $Q(t)$ no tanque em qualquer instante t e, também, a quantidade limite Q_L presente após um período de tempo bem longo. Se $r = 3$ e $Q_0 = 2Q_L$, encontre o instante T após o qual o nível de sal está a 2% de Q_L . Encontre, também, a taxa de fluxo necessária para que o valor de T não seja maior do que 45 minutos.

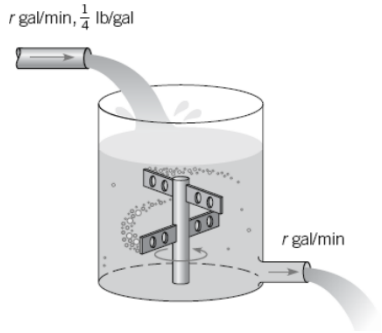


Figura 1.1: Ilustração do tanque de água do exemplo 1 do capítulo 2.3 Boyce, di Prima

Solução:
Dados:

1. No instante t_0 o tanque contém Q_0 libras de sal dissolvido em 100 galões de água.

2. 1 libra $\approx$ 435,5 gramas

3. 1 galão $\approx$ 3,785L

4. Entra solução a uma taxa de $r\frac{galões}{min}$ que contém $\frac{1}{4}\frac{lb}{gal}$

5. A solução sai à mesma taxa

Vamos modelar esse problema analisando a variação da quantidade de sal Q no sistema. Para isso, pode-se escrever essa variação como a derivada de Q com relação ao tempo:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \text{ taxa de entrada } - \text{ taxa de saída}$$

A taxa de entrada foi dada no enunciado do sistema. Uma vez que temos a quantidade de solução e a concentração dessa solução, seu produto é igual à quantidade de sal que está entrando no sistema.

$$r\frac{gal}{min}\cdot\frac{1}{4}\frac{lb}{gal} = \frac{r}{4}\frac{lb}{min}$$

Quanto à taxa de saída, foi fornecida a vazão com que a solução sai, de $r\frac{gal}{min}$. Assim, para determinar a quantidade de sal presente nesses r galões, é necessário descobrir sua concentração. Uma vez que foi dito que a mistura é bem mexida, vamos considerar que a quantidade de sal é solubilizada de modo ideal, de modo que não há pontos com maior ou menor presença de sal. A concentração, então, pode ser calculada como massa sobre volume, mas, uma vez que o volume é constante e a massa é o que desejamos modelar, iremos escrevê-la como:

$$C = \frac{M}{V} = \frac{Q}{100}\frac{lb}{gal}$$

Assim, a taxa de saída será escrita como o produto da vazão pela concentração do tanque, isto é

$$r\frac{gal}{min}\cdot\frac{Q}{100}\frac{lb}{gal} = r\frac{Q}{100}\frac{lb}{min}$$

Desse modo, substituindo as taxas de entrada e saída na EDO original, obtemos a modelagem para esse problema.

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{4} - r\frac{Q}{100}$$

Juntando os termos que possuem Q, essa equação pode ser reescrita como

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + r\frac{Q}{100} = \frac{r}{4}$$

A fim de solucionar essa equação, deseja-se encontrar qual é a função Q que a resolve. No entanto, para isso, é interessante multiplicar os dois lados por uma função arbitrária μ de modo que

$$\mu\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + r\frac{Q}{100}\mu = \mu\frac{r}{4}$$

Essa equação parece muito com a forma em que ficaria a expansão da derivada de um produto, de modo que pode-se escrever

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Q \cdot \mu) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\mu + Q\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}$$

Para encontrar uma função μ que torne isso verdade, deve-se igualar

$$r\frac{Q}{100}\mu = Q\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}$$

Assim, dividindo ambos os lados por Q e isolando μ,

$$\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{100}$$

Essa, então, é uma equação separável que pode ser resolvida multiplicando ambos os lados por dt e integrando de ambos os lados, de modo a encontrar

$$\int \frac{1}{\mu} d\mu = \int \frac{r}{100} dt$$

Com isso, integrando encontra-se

$$ln(\mu) = \frac{rt}{100}$$

exponenciando de ambos os lados, encontra-se uma função μ que permite que a equação seja escrita da forma desejada. Nota-se que, nesse caso, a constante de integração é desprezada uma vez que deseja-se uma função qualquer que satisfaça.

$$\mu = exp(\frac{rt}{100})$$

Uma vez que a função μ é nos permite escrever parte da equação como uma derivada, substituiremos isso na modelagem inicial, de modo que a situação representada pode ser descrita por

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Q \cdot \mu) = \mu\frac{r}{4}$$

Ao integrar de ambos os lados em relação a t, remove-se a derivada de Q, de modo que se encontra

$$Q \cdot \mu = \int \mu\frac{r}{4} dt$$

substituindo μ pela função encontrada, essa equação pode ser reescrita na forma de

$$Q \cdot e^{\frac{rt}{100}} = \int e^{\frac{rt}{100}}\frac{r}{4} dt$$

Isolando Q do lado direito e realizando a integração, encontra-se

$$Q = e^{-\frac{rt}{100}}(\frac{100}{r} \cdot e^{\frac{rt}{100}}\frac{r}{4} + C)$$

Assim, simplificando essa expressão encontra-se

$$Q = 25 + C \cdot e^{-\frac{rt}{100}}$$

Como o valor inicial diz que $Q(0) = Q_0$, é necessário encontrar o valor de C para que isso seja verdade. Assim, isolando C na equação obtida, temos

$$Q_0 = 25 + C \cdot e^{-\frac{r \cdot 0}{100}}$$

De modo que, isolando C, obtem-se

$$Q_0 - 25 = C$$

Assim, de modo geral, $Q(t)$ pode ser escrita como

$$Q(t) = 25 + (Q_0 - 25)e^{\frac{-rt}{100}}$$

Uma vez que pode-se escrever $Q(t)$ em função de t é possível prever seu comportamento, por exemplo identificando qual será a quantidade limite de sal no tanque. Assim, para determinar um tempo muito longo utilizaremos o limite de quando o tempo vai para infinito, de modo que

$$Q_L = \lim_{t \to +\infty} Q(t) = \lim_{t \to +\infty} 25 + (Q_0 - 25)e^{\frac{-rt}{100}} = 25$$

Com isso, percebe-se que a quantidade limite de sal no tanque independe de quantos galões estão entrando, sendo apenas afetada pela concentração da água que entra.

Por fim, considerando $r = 3$ e $Q_0 = 2Q_L$, podemos, por exemplo, encontrar o tempo no qual a quantidade de sal no tanque está a 2% da quantidade limite. Para isso, vamos considerar que $|1 - \frac{Q(t)}{Q_L}| = 0,02$. Esse valor será de $0,02$ uma vez que a quantidade inicial é maior que o ponto de equilíbrio estável da solução, que será igual ao Q_L. Assim, basta encontrar um tempo que satisfaça à igualdade

$$Q(t) = 1,02 \cdot Q_L$$

Assim, uma vez que se tem a determinação de $Q(t)$ e Q_L, tem-se

$$25 + (Q_0 - 25) \cdot e^{-\frac{rt}{100}} = 1,02 \cdot Q_L$$

Isolando a exponencial e tirando o logaritmo de ambos os lados, a fim de encontrar t, tem-se

$$-\frac{rt}{100} = \ln((1,02 \cdot Q_L - 25)\frac{1}{Q_0 - 25})$$

Assim, encontra-se que o tempo pode ser encontrado por

$$t = -\frac{100}{r} \ln(1,02 \cdot Q_L - 25 \cdot \frac{1}{Q_0 - 25})$$

Substituindo os valores e efetuando o cálculo

$$t = 130,40 \text{ minutos}$$

Concluindo, pode-se desejar encontrar, também, uma taxa de fluxo r tal que chegaria-se a 2% da quantidade limite em menos de 45 minutos. Assim, uma vez que já se chegou à equação

$$-\frac{rt}{100} = \ln((1,02 \cdot Q_L - 25)\frac{1}{Q_0 - 25})$$

Isolando r e substituindo o valor de t, encontra-se

$$r = -\ln((1,02 \cdot Q_L - 25)\frac{1}{Q_0 - 25})\frac{100}{45}$$

Substituindo os valores, chega-se ao valor de

$$r = 8,69 \text{ galões por minuto}$$

■

Exemplo 1.2 (produtos químicos em uma lagoa) Considere uma lagoa que contém, inicialmente, 10 milhões de galões de água fresca. Água contendo um produto químico indesejável flui para a lagoa a uma taxa de 5 milhões de gal/ano (galões por ano) e a mistura sai da lagoa à mesma taxa. A concentração $\gamma(t)$ do produto químico na água que entra varia periodicamente com o tempo t de acordo com a expressão $\gamma(t) = 2 + sen(2t)g/gal$ (gramas por galão). Construa um modelo matemático desse processo de fluxo e determine a quantidade de produto químico na lagoa em qualquer instante. Desenhe o gráfico da solução e descreva em palavras o efeito da variação na concentração da água que entra na lagoa.

Solução:

Pode-se observar a variação da concentração a fim de entender a variação da quantidade de solutos na lagoa. Para isso, a quantidade de produtos Q varia segundo

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \text{ taxa de entrada } - \text{ taxa de saída}$$

A fim de determinar a entrada de produto, temos que entram 5 milhões de galões por ano a uma concentração variável, de modo que essa entrada pode ser descrita por

$$i = 5 \cdot 10^6 \cdot \gamma \frac{\text{gramas}}{\text{ano}}$$

Analogamente, a taxa de saída pode ser obtida considerando que saem, também, 5 milhões de galões por ano e a concentração dessa saída é igual à concentração dos produtos na lagoa. Assim, a saída pode ser descrita como

$$o = 5 \cdot 10^6 \cdot \frac{Q}{10^7} \frac{\text{gramas}}{\text{ano}}$$

Em que $\frac{Q}{10^7}$ é a concentração do produto dentro da lagoa. Com isso, pode-se descrever a variação da concentração de produtos na lagoa por meio da equação

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 5 \cdot 10^6 \gamma - \frac{5}{10} Q$$

Para facilitar as contas, ao invés de tratar a quantidade de produtos como gramas, será tratada em toneladas, de modo que $Q = 10^6 \cdot q$. Assim, pode-se reescrever a equação como

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^6 \cdot \gamma - \frac{1}{2} \cdot 10^6 \cdot q$$

O que, ao passar o 10^6 dividindo na direita permite encontrar uma nova equação com os coeficientes simplificados, de modo que tem-se

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 5\gamma - \frac{1}{2} q$$

Isolando o que envolve q no lado esquerdo da equação tem-se então

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{2} = 5\gamma$$

A partir dessa equação, é possível utilizar o método do fator integrante para resolvê-lo. Para isso, multiplicam-se ambos os lados por μ, de modo que encontra-se

$$\mu \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \mu \frac{q}{2} = 5\gamma\mu$$

Deseja-se, então, encontrar um μ tal que possa-se reescrever essa equação na forma

$$(q \cdot \mu)' = \mu \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} q = 5\gamma\mu$$

Assim, a fim de que isso seja verdade, deve ser verdade também que

$$\mu \cdot \frac{q}{2} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} q$$

A fim de resolver essa equação, isola-se μ à esquerda e dividem-se ambos os lados por q, de modo que encontra-se que

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}$$

Essa é uma equação diferencial separável em que, ao passar o dt à direita e integrar de ambos os lados, encontra-se

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{1}{2} dt$$

De modo que, ao calcular essas integrais, encontra-se que

$$ln(\mu) = \frac{t}{2} + C$$

No entanto, uma vez que queremos um μ qualquer para, simplesmente, poder solucionar a equação, iremos desconsiderar essa constante de integração. Com isso, para isolar μ, deve-se exponenciar ambos os lados, encontrando, então, que

$$\mu = exp\left(\frac{t}{2}\right)$$

Com esses passos, pode-se encontrar uma função μ a fim de que seja possível rescrever a equação que modela o problema na forma.

$$(q \cdot \mu)' = 5\gamma\mu$$

Pronta essa etapa, é possível, uma vez que todas as funções são dependentes de t, integrar de ambos os lados. Assim, encontra-se que

$$\int \frac{\mathrm{d}q \cdot \mu}{\mathrm{d}t} dt = \int 5\gamma\mu dt$$

Podemos, então, aplicar o teorema fundamental do cálculo do lado esquerdo, simplificando essa equação para.

$$q \cdot \mu = \int 5\gamma\mu dt$$

Agora, é necessário solucionar a integral, para isso expandindo as funções γ e μ. Encontra-se, então

$$q \cdot \mu = \int 5 \cdot (2 + sen(2t)) \cdot e^{\frac{t}{2}} dt$$

A fim de solucionar a integral, chamamos ela de I. Com isso, pode-se reescrever I como

$$q \cdot \mu = I$$

A primeira parte dessa integral é de fácil solução, uma vez que busca-se a solução da integral de uma exponencial. Para a segunda parte, envolvendo o seno, deve-se, no entanto, utilizar o método da integração por partes. Assim, um possível primeiro passo seria separar I em duas, de modo que tem-se

$$I = 5 \cdot (2 \cdot \int e^{\frac{t}{2}} dt + \underbrace{\int sen(2t) \cdot e^{\frac{t}{2}} dt}_{J})$$

Ao resolver a primeira integral e separar a segunda, chamando-a de J, encontra-se que

$$I = 10 \cdot 2 \cdot e^{\frac{t}{2}} + 5 \cdot J$$

Agora, é necessário encontrar a integral J a fim de ser possível dar uma resposta ao problema.

$$J = 2 \cdot e^{\frac{t}{2}} \cdot sen(2t) - 4 \int e^{\frac{t}{2}} (cos(2t)) dt$$

Aplicando esse método, novamente, chegamos à equação em que

$$J = 2e^{\frac{t}{2}} sen(2t) - 4(\cdot 2 \cdot e^{t/2} \cdot cos(2t) - \int 2 \cdot e^{\frac{t}{2}} \cdot 2 \cdot (-sen(2t))dt$$

O que, ao reorganizar os termos, pode ser reescrito como

$$J = 2e^{\frac{t}{2}} sen(2t) - 8e^{\frac{t}{2}} cos(2t) - 16J$$

Reorganizando a equação acima e isolando J, encontra-se

$$17J = 2e^{\frac{t}{2}} sen(2t) - 8e^{\frac{t}{2}} cos(2t)$$

De modo que pode-se reescrever J como

$$J = \frac{2}{17} e^{\frac{t}{2}} sen(2t) - \frac{8}{17} e^{\frac{t}{2}} cos(2t)$$

Com isso, uma vez calculado J, pode-se encontrar o valor de I, retornando a equação acima, de modo que

$$I = 20e^{\frac{t}{2}} + \frac{10}{17} e^{\frac{t}{2}} sen(2t) - \frac{40}{17} e^{\frac{t}{2}} cos(2t)$$

No entanto, uma vez que I representa a solução de uma integral, deve-se incluir uma constante de integração, de modo que

$$I = 20e^{\frac{t}{2}} + \frac{10}{17} e^{\frac{t}{2}} sen(2t) - \frac{40}{17} e^{\frac{t}{2}} cos(2t) + C$$

Assim, retornando à equação de onde foi definida I, encontramos que

$$q \cdot \mu = 20e^{\frac{t}{2}} + \frac{10}{17} e^{\frac{t}{2}} sen(2t) - \frac{40}{17} e^{\frac{t}{2}} cos(2t) + C$$

Mas, uma vez que $\mu = e^{\frac{t}{2}}$, pode-se passar esse termo para a esquerda de modo que se encontra

$$q(t) = 20 + \frac{10}{17} sen(2t) - \frac{40}{17} cos(2t) + \frac{C}{e^{\frac{t}{2}}}$$

Segundo o enunciado da questão, a lagoa originalmente possuía água fresca, isto é, não haviam produtos químicos nela. Assim, obtêm-se uma condição inicial de que

$$q(0) = 0$$

A fim de satisfazer essa situação, substituindo o valor de t na equação encontrada para descrever a quantidade de produto nessa lagoa, tem-se

$$0 = 20 + \frac{10}{17} sen(0) - \frac{40}{17} cos(0) + \frac{C}{e^0}$$

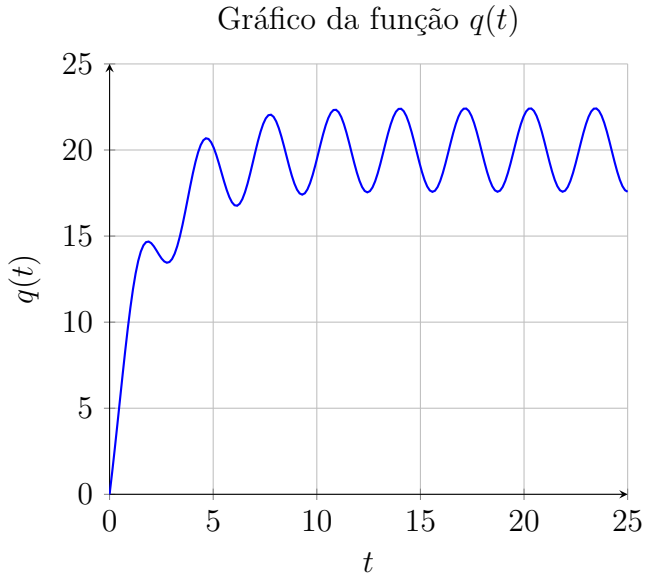


Figura 1.2: Gráfico da variação da quantidade de produtos na lagoa

O que é o mesmo de dizer, isolando C, que

$$C = \frac{40}{17} - 20 = -\frac{300}{17}$$

Assim, para esse problema, a quantidade de produto dentro da lagoa será descrito por

$$q(t) = 20 + \frac{10}{17}sen(2t) - \frac{40}{17}cos(2t) - \frac{300}{17}e^{-\frac{t}{2}}$$

Essa função, expressa em um gráfico, é a seguinte:

Assim, a partir desse gráfico observa-se que a quantidade de produtos químicos aumenta de modo muito acelerado nos primeiros anos mas, após certo período, passa a oscilar em torno de 20 toneladas. ■

A seguir iremos resolver alguns exercícios seguindo a linha dos exemplos anteriores.

Exercício 1.1 (Testes de hidrodinâmica) Considere um tanque utilizado em certos experimentos hidrodinâmicos. Após um experimento, o tanque contém 200 litros de uma solução corante com concentração de 1 g/L. Para se preparar para o próximo experimento, o tanque deve ser lavado com água fresca fluindo para dentro a uma taxa de 2 L/min, sendo que a solução bem misturada escoa para fora na mesma taxa. Determine o tempo que se passará até que a concentração do corante no tanque atinja 1% de seu valor original.

Solução:

Seja $Q(t)$ a quantidade de corante (em gramas) no tanque no instante t, medido em minutos. Inicialmente, o tanque contém 200 litros de solução com concentração 1 g/L. Assim:

$$Q(0) = 200 \cdot 1 = 200 \text{ g}$$

Como a água que entra é pura, não há entrada de corante. O corante sai a uma taxa de 2 L/min com concentração $\frac{Q(t)}{200}$, pois o volume total no tanque permanece constante. Logo, a taxa de saída do corante é:

$$\text{Taxa de saída} = 2 \cdot \frac{Q(t)}{200} = \frac{Q(t)}{100}$$

Portanto, a equação diferencial que rege o sistema é:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{100}$$

Separando as variáveis e integrando ambos os lados:

$$\int \frac{1}{Q}\, dQ = -\int \frac{1}{100}\, dt$$

$$\ln|Q| = -\frac{t}{100} + C$$

Aplicando exponencial em ambos os lados:

$$Q(t) = Ae^{-t/100}$$

Usando a condição inicial $Q(0) = 200$:

$$Q(0) = A \cdot 1 = A \Rightarrow A = 200$$

Assim, a solução geral é:

$$Q(t) = 200e^{-t/100}$$

Como o volume do tanque permanece constante em 200 L, a concentração no tempo t é dada por:

$$C(t) = \frac{Q(t)}{200} = e^{-t/100}$$

Queremos determinar o instante T em que a concentração atinge 1% do valor inicial, ou seja, $C(T) = 0{,}01$:

$$e^{-T/100} = 0{,}01$$

Aplicando logaritmo natural em ambos os lados:

$$-\frac{T}{100} = \ln(0{,}01) \Rightarrow T = -100 \cdot \ln(0{,}01)$$

$$T = 100 \cdot \ln(100) \approx 100 \cdot 4{,}6052 = 460{,}52$$

Portanto, serão necessários aproximadamente 460,5 minutos para que a concentração de corante atinja 1% do valor inicial. ■

Exercício 1.2 (Tanque com sal) Um tanque contém inicialmente 120 litros de água pura. Uma solução com concentração de sal igual a γ g/L entra no tanque a uma vazão de 2 L/min, enquanto a mistura, homogênea, sai do tanque na mesma vazão. Determine uma expressão para a quantidade de sal no tanque em função do tempo t e da concentração γ. Além disso, encontre a quantidade limite de sal no tanque quando $t \to \infty$.

Solução:
Seja $Q(t)$ a quantidade de sal (em gramas) no tanque no instante t (minutos).

Inicialmente, o tanque contém água pura, ou seja,

$$Q(0) = 0.$$

Como a mistura entra a uma taxa de 2 L/min com concentração γ g/L, a taxa de entrada de sal é

$$2 \cdot \gamma = 2\gamma \quad \text{g/min.}$$

O volume do tanque permanece constante em 120 L, pois a vazão de entrada e saída são iguais.

A concentração da mistura no tanque no instante t é

$$\frac{Q(t)}{120} \quad \text{g/L.}$$

Como a saída ocorre à taxa de 2 L/min, a taxa de saída de sal é

$$2 \cdot \frac{Q(t)}{120} = \frac{Q(t)}{60} \quad \text{g/min.}$$

Logo, o modelo da variação da quantidade de sal é dado pela equação diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = \text{taxa de entrada} - \text{taxa de saída} = 2\gamma - \frac{Q}{60}.$$

Para resolver, podemos usar o método do fator integrante.
Reescrevendo:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{60}Q = 2\gamma.$$

O fator integrante é

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{60} dt} = e^{\frac{t}{60}}.$$

Multiplicando a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{t}{60}}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{60}e^{\frac{t}{60}}Q = 2\gamma e^{\frac{t}{60}} \implies \frac{d}{dt}\left(Qe^{\frac{t}{60}}\right) = 2\gamma e^{\frac{t}{60}}.$$

Integrando ambos os lados em relação a t:

$$Q(t)e^{\frac{t}{60}} = \int 2\gamma e^{\frac{t}{60}}dt + C.$$

Calculando a integral:

$$\int e^{\frac{t}{60}}dt = 60e^{\frac{t}{60}} + K.$$

Portanto,

$$Q(t)e^{\frac{t}{60}} = 2\gamma \cdot 60e^{\frac{t}{60}} + C = 120\gamma e^{\frac{t}{60}} + C.$$

Isolando $Q(t)$:

$$Q(t) = 120\gamma + Ce^{-\frac{t}{60}}.$$

Aplicando a condição inicial $Q(0) = 0$, temos

$$0 = 120\gamma + C \implies C = -120\gamma.$$

Logo, a solução geral é

$$\boxed{Q(t) = 120\gamma\left(1 - e^{-\frac{t}{60}}\right).}$$

Finalmente, para $t \to \infty$, temos

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = 120\gamma\,(1 - 0) = 120\gamma.$$

Ou seja, a quantidade limite de sal no tanque é

$$Q_L = 120\gamma \quad \text{gramas.}$$

■

Exercício 1.3 (Tanque com fluxo variável de sal) Um tanque contém inicialmente 100 galões de água limpa. Água contendo 1/2 libra de sal por galão é despejada no tanque a uma taxa de 2 galões por minuto, enquanto a mistura sai na mesma taxa. Após 10 minutos, esse processo é interrompido, e água limpa passa a ser despejada no tanque à mesma taxa de 2 galões por minuto, com a mistura saindo também na mesma taxa. Determine a quantidade de sal no tanque após mais 10 minutos do segundo processo.

Solução:

Seja $Q(t)$ a quantidade de sal (em libras) no tanque no instante t (em minutos), considerando $t = 0$ como o início do processo. Vamos dividir em duas partes, separando por casos.

Primeira fase: de $t = 0$ até $t = 10$ minutos, entra solução com concentração de $\frac{1}{2}$ libra/galão a uma vazão de 2 galões/min, e a mistura sai à mesma vazão.

O volume no tanque permanece constante em 100 galões.

A taxa de entrada de sal é

$$2 \times \frac{1}{2} = 1 \quad \text{libra/min.}$$

A concentração no tanque no instante t é

$$\frac{Q(t)}{100} \quad \text{libra/galão.}$$

A taxa de saída de sal é

$$2 \times \frac{Q(t)}{100} = \frac{Q(t)}{50} \quad \text{libra/min.}$$

Portanto, a equação diferencial que modela a primeira fase é

$$\frac{dQ}{dt} = 1 - \frac{Q}{50}, \quad 0 \leq t \leq 10,$$

com condição inicial

$$Q(0) = 0,$$

pois inicialmente o tanque contém água limpa.

Reescrevendo:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{50}Q = 1.$$

O fator integrante é

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{50} dt} = e^{t/50}.$$

Multiplicando a equação diferencial por $\mu(t)$:

$$e^{t/50}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{50}e^{t/50}Q = e^{t/50}.$$

Reconhecendo o lado esquerdo como a derivada do produto,

$$\frac{d}{dt}\left(Qe^{t/50}\right) = e^{t/50}.$$

Integrando ambos os lados:

$$Q(t)e^{t/50} = \int e^{t/50} dt + C = 50e^{t/50} + C.$$

Isolando $Q(t)$:

$$Q(t) = 50 + Ce^{-t/50}.$$

Aplicando a condição inicial $Q(0) = 0$:

$$0 = 50 + C \implies C = -50.$$

Portanto, na primeira fase,

$$Q(t) = 50\left(1 - e^{-t/50}\right), \quad 0 \leq t \leq 10.$$

Calculando a quantidade de sal no tanque ao final da primeira fase ($t = 10$):

$$Q(10) = 50\left(1 - e^{-10/50}\right) = 50\left(1 - e^{-0,2}\right).$$

Para a segunda fase, isto é, para $t > 10$ minutos, a entrada de sal cessa (água limpa entra), logo, a taxa de entrada é zero. A mistura continua saindo na mesma vazão, 2 galões/min.

Definimos um novo tempo $s = t - 10$ para a segunda fase, com condição inicial

$$Q(0) = Q(10) = 50\left(1 - e^{-0,2}\right).$$

A equação diferencial para a segunda fase é:

$$\frac{dQ}{ds} = -\frac{Q}{50}, \quad s \geq 0.$$

Essa é uma equação separável cuja solução geral é:

$$Q(s) = Ke^{-s/50}.$$

Aplicando a condição inicial $Q(0) = Q(10)$:

$$K = Q(10) = 50\left(1 - e^{-0,2}\right).$$

Queremos a quantidade de sal após mais 10 minutos, ou seja, em $s = 10$:

$$Q(10) = 50\left(1 - e^{-0,2}\right)e^{-10/50} = 50\left(1 - e^{-0,2}\right)e^{-0,2}.$$

Podemos simplificar a expressão:

$$Q(10) = 50\left(e^{-0,2} - e^{-0,4}\right).$$

Dessa forma, quantidade de sal no tanque ao final dos 20 minutos (10 minutos com entrada de sal e 10 minutos com entrada de água limpa) é

$$Q = 50\left(e^{-0,2} - e^{-0,4}\right) \text{ libras.}$$

Numericamente,

$$e^{-0,2} \approx 0,8187, \quad e^{-0,4} \approx 0,6703,$$

logo,

$$Q \approx 50 \times (0,8187 - 0,6703) = 50 \times 0,1484 = 7,42 \text{ libras.}$$

■

Exercício 1.4 (Lei de resfriamento de Newton) A lei do resfriamento de Newton diz que a temperatura de um objeto varia a uma taxa proporcional à diferença entre a temperatura do objeto e a de seu meio ambiente (na maioria dos casos, a temperatura do ar ambiente). Suponha que a temperatura ambiente é de 70 ^{o}F (cerca de 20 ^{o}C) e que a taxa constante é 0,05 $(\text{min})^{\breve{}1}$. Escreva uma equação diferencial para a temperatura do objeto em qualquer instante de tempo. Note que a equação diferencial é a mesma, independentemente se a temperatura do objeto está acima ou abaixo da temperatura ambiente.

Solução:

Segundo a lei do resfriamento, a temperatura de um objeto varia a uma taxa proporcional à diferença entre a temperatura do objeto e seu meio externo. Assim, essa variação pode ser escrita como a derivada

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -K \cdot (T_{obj} - T_{amb})$$

Vale notar que há um sinal de menos nessa derivada. Isso deve ao fato de que, caso a temperatura do objeto seja maior que a do ambiente, a variação deve ser negativa, uma vez que o objeto perde calor para o ambiente. Assim, tendo o sinal de menos, isso de fato acontece. Dado que K é 0.05 e a temperatura é 70^o F, podemos reescrever a variação da temperatura como:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -0.05(u - 70)$$

Por isso, pode-se isolar os termos que contém a função u. Assim, fazendo isso

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 0.05u = 0.05 \cdot 70$$

Assim, utilizando o método do fator integrante, deduzido nos problemas 1.1 e 1.2 encontramos que essa função pode ser reescrita como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u \cdot \mu) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u \cdot exp(0.05t)) = \mu \cdot 3.5$$

Assim, uma vez que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u \cdot \mu) = \mu \cdot 3.5$$

Pode-se integrar de ambos os lados e, aplicando o teorema fundamental do cálculo,

$$u \cdot \mu = \int \mu \cdot 3.5 dt$$

Substituindo o valor de μ na direita e realizando a integração da exponencial,

$$u \cdot e^{0.05t} = 3.5 \cdot \frac{e^{0.05t}}{0.05} + C$$

Com isso, dividindo ambos os lados por $e^{0.05t}$, chega–se a uma expressão de u

$$u = \frac{3.5}{0.05} + C \cdot e^{-0.05t}$$

Assim, uma vez que não há um valor inicial, não é possível encontrar um valor para a constante C. A temperatura pode ser expressa em função do tempo, desse modo, como

$$u(t) = 70 + C \cdot e^{-0.05t}$$

■

Exercício 1.5 (Lei de resfriamento de Newton - Bis) De acordo com a lei do resfriamento de Newton (veja o exercício 1.4), a temperatura $u(t)$ de um objeto satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -k(u - T)$$

em que T é a temperatura ambiente constante e k é uma constante positiva. Suponha que a temperatura inicial do objeto é $u(0) = u_0$.

1. Encontre a temperatura do objeto em qualquer instante.

2. Seja τ o instante no qual a diferença inicial de temperatura $u_0 - T$ foi reduzida pela metade. Encontre a relação entre k e τ.

Solução:
Similarmente ao que foi feito no exercício 1.5, será solucionada a equação diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -k(u - T)$$

Para isso, primeiro é necessário isolar a função u, chegando à equação:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + ku = kT$$

Então, multiplica-se os dois lados por μ,

$$\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \mu ku = \mu kT$$

A fim de resolver essa equação, busca-se escrever o lado esquerdo como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u \cdot \mu) = \mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \mu ku$$

Para isso, aplicando a regra da cadeia,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mu + u\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = \mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \mu ku$$

Subtraindo $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mu$ em ambos os lados e, então, dividindo-os por u, chega-se à equação:

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = \mu k$$

Isolando μ na esquerda e multiplicando os dois lados por dt,

$$\frac{d\mu}{\mu} = kdt$$

Integrando ambos os lados,

$$\ln(\mu) = kt + C$$

Uma vez que deseja-se qualquer função μ que satisfaça esse problema, despreza-se a constante de integração e, para chegar a uma expressão para μ, exponencia-se de ambos os lados:

$$\mu = e^{kt}$$

Assim, utilizando isso na equação encontrada,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u \cdot \mu) = kT\mu$$

Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$u \cdot \mu = \int kT\mu dt$$

Uma vez que, na integral, só μ é função de t, pode-se reescrever essa equação como

$$u \cdot \mu = kT \int e^{kt} dt$$

O que, ao substituir o valor de μ e calcular a integral, é

$$u \cdot \mu = kT\frac{e^{kt}}{k} + C$$

Dividindo ambos os lados por e^{kt}

$$u = T + C \cdot e^{-kt}$$

Considerando que a temperatura inicial do objeto é

$$u(0) = u_0$$

É possível encontrar C uma vez que

$$u_0 = T + C \cdot e^{-k0}$$

Assim, isolando o C, encontra-se que

$$C = u_0 - T$$

Unindo as duas equações, encontra-se que

$$u(t) = T + (u_0 - T) \cdot e^{-kt}$$

Com isso, pode-se encontrar o tempo τ em que a diferença da temperatura é metade da original. Para isso, basta solucionar a equação

$$T - u(\tau) = \frac{T - u_0}{2}$$

Para resolver isso, basta substituir a expressão para u encontrada:

$$T - (T + (u_0 - T)e^{-k\tau}) = \frac{u_0 - T}{2}$$

Simplificando-a, encontra-se que

$$(u_0 - T)e^{-k\tau} = \frac{u_0 - T}{2}$$

Uma vez que deseja-se obter τ, divide-se ambos os lados por $(u_0 - T)$, encontrando

$$e^{-k\tau} = \frac{1}{2}$$

Assim, tirando o logaritmo de ambos os lados,

$$-k\tau = \ln(\frac{1}{2})$$

Com isso, dividindo ambos os lados por $-k$, chega-se a

$$\tau = \frac{\ln(2)}{k}$$

■

Exercício 1.6 (Lei de resfriamento de Newton em um prédio) Suponha que um prédio perde calor de acordo com a lei do resfriamento de Newton (veja o exercício 1.5) e que a taxa constante k tem o valor de $0.15h^{-1}$. Assuma que a temperatura interior é de 70^oF quando o sistema de aquecimento falha. Se a temperatura externa é de 10^oF, quanto tempo demora até que a temperatura interior caia para 32^oF?

Solução:

Como calculado no exercício 1.5, a temperatura de um objeto varia, de acordo com o tempo, segundo a equação:

$$u(t) = T + (u_0 - T) \cdot e^{-kt}$$

Assim, no caso em que a temperatura ambiente T é 10^o F, u_o é 70^oF e k é $0.15h^{-1}$, basta substituir na fórmula para encontrar o tempo t em que $u(t)$ vale 32^o F. Uma vez que se deseja encontrar uma expressão para o tempo, primeiro isola-se a exponencial

$$e^{-kt} = \frac{(u(t) - T)}{u_0 - T}$$

Assim, uma vez que se deseja o tempo, tira-se o logaritmo de ambos os lados, de modo que

$$-kt = \ln\left(\frac{(u(t) - T)}{u_0 - T}\right)$$

Então, dividindo ambos os lados por $-k$, encontra-se que o tempo será

$$t = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{(u(t) - T)}{u_0 - T}\right)$$

Enfim, substituindo os valores, desejados:

$$t = -\frac{1}{0.15}\ln\left(\frac{(32 - 10)}{70 - 10}\right)$$

Portanto, após 6.68 horas a temperatura do prédio chega a 32^oF.

■

Exercício 1.7 (Administração intravenosa de medicamento) Um certo medicamento está sendo administrado por via intravenosa a um paciente hospitalizado. Um fluido contendo $5\,\mathrm{mg/cm^3}$ do medicamento entra na corrente sanguínea do paciente a uma taxa de $100\,\mathrm{cm^3/h}$. O medicamento é absorvido pelos tecidos do corpo ou de outra forma eliminado da corrente sanguínea a uma taxa proporcional à quantidade presente, com uma constante de taxa igual a $0{,}4\,\mathrm{h^{-1}}$.

(a) Supondo que o medicamento esteja sempre uniformemente distribuído por toda a corrente sanguínea, escreva uma equação diferencial para a quantidade do medicamento presente na corrente sanguínea em qualquer instante de tempo.

(b) Quanto do medicamento estará presente na corrente sanguínea após um longo período de tempo?

Solução:

Seja $Q(t)$ a quantidade de medicamento (em mg) presente na corrente sanguínea no instante t (em horas).

Sabemos que o fluido contendo o medicamento entra no corpo a uma taxa de 100 $\mathrm{cm^3/h}$, com concentração de 5 $\mathrm{mg/cm^3}$. Assim, a taxa de entrada do medicamento é:

$$\text{Entrada} = 100 \times 5 = 500 \quad \text{mg/h}.$$

O medicamento é eliminado da corrente sanguínea a uma taxa proporcional à quantidade presente, com constante de proporcionalidade $k = 0{,}4$. Assim, a taxa de saída é:

$$\text{Saída} = 0{,}4Q(t).$$

Portanto, a equação diferencial que descreve o sistema é:

$$\frac{dQ}{dt} = 500 - 0{,}4Q(t),$$

com condição inicial

$$Q(0) = 0,$$

supondo que inicialmente não há medicamento na corrente sanguínea.

Reescrevendo a equação:

$$\frac{dQ}{dt} + 0{,}4Q = 500.$$

Cujo fator integrante é:

$$\mu(t) = e^{\int 0{,}4\,dt} = e^{0{,}4t}.$$

Multiplicando ambos os lados por $\mu(t)$:

$$e^{0{,}4t}\frac{dQ}{dt} + 0{,}4e^{0{,}4t}Q = 500e^{0{,}4t}.$$

Reconhecendo o lado esquerdo como a derivada de um produto:

$$\frac{d}{dt}\left(Qe^{0{,}4t}\right) = 500e^{0{,}4t}.$$

Integrando ambos os lados:

$$Q(t)e^{0{,}4t} = \int 500e^{0{,}4t}dt = \frac{500}{0{,}4}e^{0{,}4t} + C = 1250e^{0{,}4t} + C.$$

Isolando $Q(t)$:

$$Q(t) = 1250 + Ce^{-0{,}4t}.$$

Aplicando a condição inicial $Q(0) = 0$:

$$0 = 1250 + C \Rightarrow C = -1250.$$

Portanto, a solução é:

$$Q(t) = 1250\left(1 - e^{-0{,}4t}\right).$$

Analisando o comportamento quando $t \to \infty$:
Como $e^{-0{,}4t} \to 0$ quando $t \to \infty$, temos que:

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = 1250\,(1 - 0) = 1250.$$

Concluímos que a quantidade de medicamento presente na corrente sanguínea em qualquer instante t é dada por:

$$Q(t) = 1250\left(1 - e^{-0,4t}\right) \text{ mg.}$$

E, após um longo período de tempo:

$$\boxed{Q = 1250 \text{ mg.}}$$

■

Exercício 1.8 (Decaimento radioativo) Um material radioativo, como o isótopo tório-234, se desintegra a uma taxa proporcional à quantidade presente no momento. Se $Q(t)$ representa a quantidade presente no instante t, então:

$$\frac{dQ}{dt} = -rQ,$$

onde $r > 0$ é a taxa de decaimento.

(a) Se 100 mg de tório-234 decaem para 82,04 mg em 1 semana, determine o valor da taxa de decaimento r.

(b) Encontre uma expressão para a quantidade de tório-234 presente em qualquer instante t.

(c) Determine o tempo necessário para que o tório-234 decaia para a metade de sua quantidade inicial (meia-vida).

Solução:
Seja $Q(t)$ a quantidade de tório-234 (em mg) presente no instante t (em dias). A equação diferencial que modela o decaimento radioativo é

$$\frac{dQ}{dt} = -rQ,$$

onde $r > 0$ é a taxa de decaimento diária.

(a) Determinando a taxa de decaimento diária r:
Sabemos que inicialmente, em $t = 0$, a quantidade é $Q(0) = 100$ mg, e que após 1 semana ($t = 7$ dias), a quantidade é $Q(7) = 82,04$ mg.
A solução geral da equação é

$$Q(t) = Q(0)e^{-rt} = 100e^{-rt}.$$

Substituindo $t = 7$ e $Q(7) = 82,04$:

$$82,04 = 100e^{-7r} \implies e^{-7r} = \frac{82,04}{100} = 0,8204.$$

Tomando o logaritmo natural de ambos os lados,

$$-7r = \ln(0{,}8204) \implies r = -\frac{1}{7}\ln(0{,}8204).$$

Calculando,

$$r \approx -\frac{1}{7} \times (-0{,}1987) = 0{,}02839 \quad (\text{dia}^{-1}).$$

(b) Expressão para $Q(t)$:

Com o valor de r encontrado, a expressão para a quantidade de tório-234 em qualquer instante t (em dias) é

$$Q(t) = 100e^{-0{,}02839t}.$$

(c) Determinando o tempo de meia-vida em dias:

A meia-vida $T_{1/2}$ é o tempo necessário para que a quantidade decaia para metade do valor inicial, ou seja,

$$Q(T_{1/2}) = \frac{100}{2} = 50.$$

Substituindo na fórmula,

$$50 = 100e^{-0{,}02839T_{1/2}} \implies e^{-0{,}02839T_{1/2}} = 0{,}5.$$

Tomando o logaritmo natural,

$$-0{,}02839T_{1/2} = \ln(0{,}5) = -0{,}6931,$$

portanto,

$$T_{1/2} = \frac{0{,}6931}{0{,}02839} \approx 24{,}4 \quad \text{dias.}$$

■

Exercício 1.9 (Relação entre meia-vida e taxa de decaimento) A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a quantidade desse material decaia para metade do seu valor original. Mostre que, para qualquer material radioativo que decai de acordo com a equação

$$\frac{dQ}{dt} = -rQ,$$

a meia-vida τ e a taxa de decaimento r satisfazem a equação

$$r\tau = \ln 2.$$

Solução:

Seja $Q(t)$ a quantidade do material radioativo no instante t, e τ a meia-vida do material, ou seja, o tempo necessário para que $Q(t)$ decaia para metade do valor inicial $Q(0)$.

A equação diferencial que modela o decaimento radioativo é

$$\frac{dQ}{dt} = -rQ,$$

onde $r > 0$ é a taxa de decaimento.

A solução geral é

$$Q(t) = Q(0)e^{-rt}.$$

Pela definição de meia-vida, temos

$$Q(\tau) = \frac{Q(0)}{2}.$$

Substituindo na solução,

$$\frac{Q(0)}{2} = Q(0)e^{-r\tau} \implies \frac{1}{2} = e^{-r\tau}.$$

Tomando o logaritmo natural de ambos os lados,

$$\ln \frac{1}{2} = \ln\left(e^{-r\tau}\right) \implies -\ln 2 = -r\tau.$$

Multiplicando ambos os lados por -1,

$$\ln 2 = r\tau.$$

■

Exercício 1.10 (Decaimento do rádio-226) O Rádio-226 possui meia-vida de 1620 anos. Determine o tempo necessário para que uma dada quantidade desse material seja reduzida em um quarto (ou seja, atinja 75% do valor inicial).

Solução:

Seja $Q(t)$ a quantidade do material no instante t (em anos), com decaimento exponencial:

$$\frac{dQ}{dt} = -r\,Q, \qquad Q(t) = Q_0 e^{-rt}.$$

A meia-vida $\tau = 1620$ anos satisfaz $Q(\tau) = \frac{1}{2}Q_0$, logo

$$\frac{1}{2}Q_0 = Q_0 e^{-r\tau} \;\Rightarrow\; e^{-r\tau} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; r = \frac{\ln 2}{\tau} = \frac{\ln 2}{1620}.$$

Queremos o tempo T para que $Q(T) = \frac{3}{4}Q_0$:

$$\frac{3}{4}Q_0 = Q_0 e^{-rT} \;\Rightarrow\; e^{-rT} = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; T = -\frac{1}{r}\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{r} = 1620\,\frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{\ln 2}.$$

$$\boxed{T \;=\; 1620\,\frac{\ln(4/3)}{\ln 2} \;\approx\; 672{,}4 \text{ anos}}$$

■

1.1.1 O problema da Braquistócrona

Um dos problemas famosos na história da Matemática é o problema da braquistócrona: encontrar uma curva ao longo da qual uma partícula desliza sem atrito em um tempo mínimo, de um ponto dado P até outro ponto Q, em que o segundo ponto está mais baixo do que o primeiro, mas não diretamente debaixo (veja a Figura 1.3). Esse problema foi proposto por Johann Bernoulli em 1696 como um desafio para os matemáticos da época. Johann Bernoulli e seu irmão Jakob Bernoulli, Isaac Newton, Gottfried Leibniz e o Marquês de L'Hôpital encontraram soluções corretas. O problema da braquistócrona é importante no desenvolvimento da Matemática como um dos precursores do cálculo das variações.

Ao resolver este problema, é conveniente colocar a origem no ponto superior P e orientar os eixos conforme ilustrado na Figura 1.3 O ponto mais baixo Q tem coordenadas (x_0, y_0). É possível mostrar, então, que a curva de tempo mínimo é dada por uma função $y = \phi(x)$ que satisfaz a equação diferencial

$$(1 + y'^2)y = k^2 \tag{1.1}$$

em que k^2 é certa constante positiva a ser determinada mais tarde.

1. Resolva a Eq. (1.1) para y'. Por que é necessário escolher a raiz quadrada positiva?

2. Introduza uma nova variável t pela relação

   $$y = k^2 sen^2 t$$

   Mostre que a equação encontrada no item 1 fica, então, na forma

   $$2k^2 sen^2 t dt = dx \tag{1.2}$$

3. Fazendo $\theta = 2t$, mostre que a solução da Eq. (1.2) para a qual $x = 0$ quando $y = 0$ é dada por

   $$x = k^2(\theta - sen\theta)/2, y = k^2(1 - cos\theta)/2 \tag{1.3}$$

   As Eqs. (1.3) são equações paramétricas da solução da Eq. (1.1) que contém o ponto $(0, 0)$. O gráfico das Eqs. (1.3) é chamada de **cicloide**.

4. Se fizermos uma escolha apropriada da constante k, então a cicloide também contém o ponto (x_0, y_0) e é a solução do problema da brasquistócrona. Encontre k, se $x_0 = 1$ e $y_0 = 2$.

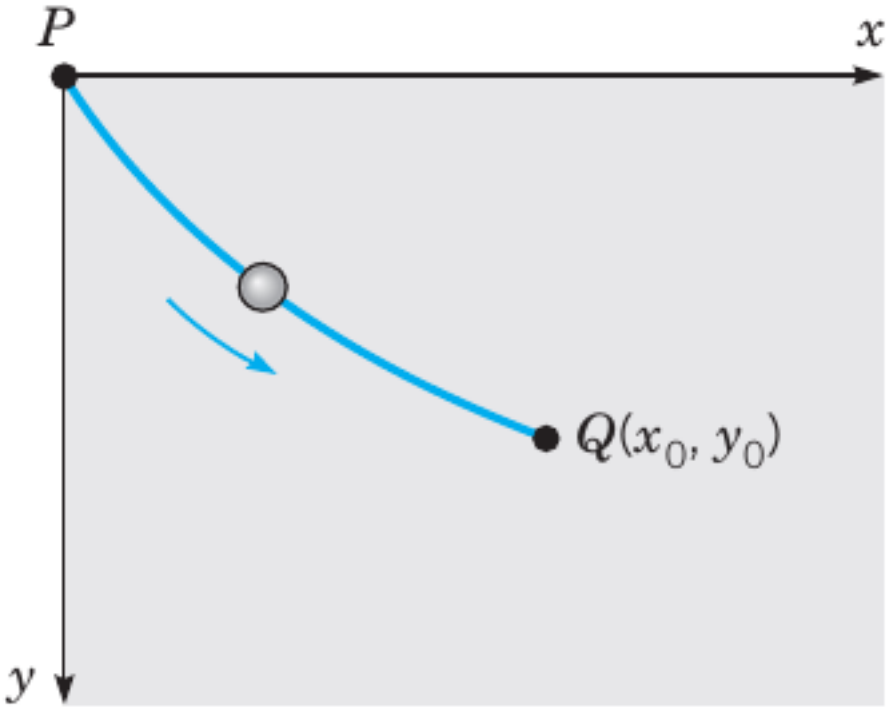


Figura 1.3: Representação da braquistócrona (imagem retirada do livro Boyce diPrima)

Solução:

A fim de isolar y', primeiro é necessário dividir ambos os lados por y, o que transforma a equação 1.1 em

$$(1 + y'^2) = \frac{k^2}{y}$$

Então, subtraindo 1 de cada lado, essa equação se torna

$$y'^2 = \frac{k^2 - y}{y}$$

Uma vez que, segundo o enunciado, $y = \phi(x)$, y' pode ser reescrito como $\frac{dy}{dx}$, de modo que, fazendo essa mudança e tirando a raiz de ambos os lados,

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{k^2 - y}{y}}$$

É necessário escolher a raiz positiva uma vez que o deslocamento será positivo, visto que houve uma inversão do eixo y para que este cresça para baixo, ou seja, y deve crescer. Caso contrário, a gravidade estaria contra o deslocamento e impediria o movimento da partícula.

utilizando isso, pode-se isolar dx na equação encontrada em **??** como sendo:

$$dy = \left(\sqrt{\frac{k^2 - y}{y}}\right) \cdot dx$$

No entanto, essa raiz pode ser reescrita como

$$dy = \frac{(k^2 - y)^{1/2}}{(y)^{1/2}} dx$$

Assim, multiplicando ambos os lados por $y^{1/2}$ e dividindo por $(k^2 - y)^{1/2}$, encontra-se que

$$dx = \sqrt{\frac{y}{k^2 - y}} dy \tag{1.4}$$

Mas, introduzindo a variável t como sendo

$$y = k^2 sen^2 t \tag{1.5}$$

Pode-se encontrar que dy é expresso por

$$dy = k^2 2sen(t)cos(t)dt$$

Não há nenhum dx expresso uma vez que, se $y = \phi(x)$, isto é, y é uma função de x, $t(y)$ implicitamente também será uma função de x, uma vez que

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

Assim, substituindo na equação 1.4

$$dx = \sqrt{\frac{k^2 sen^2 t}{k^2 - (k^2 sen^2 t)}} \cdot (k^2 2sen(t)cos(t)dt)$$

Assim, uma vez que, no numerador da raiz ambos os termos estão ao quadrado é possível já efetuar a radiciação. Já no denominador, pode-se colocar o k^2 em evidência e também tirá-lo da raiz de modo que

$$dx = \frac{k \cdot sent}{k\sqrt{1 - sen^2 t}} k^2 \cdot 2 \cdot sent \cdot costdt$$

A partir da identidade trigonométrica $sen^2 t + cos^2 t = 1$, pode-se dizer que $\sqrt{1 - sen^2 t} = cost$. Assim, fazendo essa substituição na equação:

$$dx = \frac{k \cdot sent}{k \cdot cost} k^2 \cdot 2 \cdot sent \cdot costdt$$

Reorganizando os termos, chega-se à equação

$$dx = k^2 \cdot 2 \cdot sen^2 tdt \tag{1.6}$$

Vai ser utilizada a equação 1.6, encontrada no último tópico. Assim, a fim de encontrar uma expressão para dx, ambos os lados serão integrados de modo que

$$\int dx = 2k^2 \int sen^2 tdt$$

Então, utilizando, novamente, a identidade trigonométrica $sen^2t + cos^2t = 1$, pode-se expressar cos^2t como

$$cos^2t = 1 - sen^2t$$

Ademais, utilizando a expressão para o cosseno do arco duplo, $cos(2t) = cos^2t - sen^2t$, pode-se isolar o cos^2t, encontrando que $cos^2t = cos(2t) + sen^2t$

Então, unindo as duas identidades, encontra-se que

$$1 - sen^2t = cos(2t) + sen^2t$$

Unindo os senos, chega-se à equação:

$$1 - cos(2t) = 2sen^2t$$

Assim, substituindo esse valor de sen^2t na integral acima, encontra-se que

$$\int dx = 2k^2 \int \frac{1 - cos(2t)}{2} dt$$

Então, calculando as integrais, encontra-se o seguinte valor para x:

$$x = k^2 \cdot \left(t - \frac{sen(2t)}{2} \right) \tag{1.7}$$

Fazendo, então, a subtituição sugerida a$\theta = 2t$, encontra-se que x pode ser expresso a partir de 1.7 como

$$x = k^2 \frac{\theta - sen\theta}{2} \tag{1.8}$$

Quanto a y, basta usar a identidade de que $sen^2t = \frac{1-cos(2t)}{2}$. Assim, seguindo a introdução de t como 1.5, basta substituir o valor de $\theta = 2t$

$$y = k^2 \frac{1 - cos\theta}{2} \tag{1.9}$$

Para isso, primeiramente há de se substituir os valores de x e y nas expressões encontradas, a fim de encontrar k

$$1 = k^2 \frac{\theta - sen(\theta)}{2} \text{ e } 2 = k^2 \frac{1 - cos(\theta)}{2}$$

De modo que, multiplicando o termo para x por 2,

$$2 = 2 \cdot k^2 \frac{\theta - sen(\theta)}{2} = k^2 \frac{1 - cos(\theta)}{2}$$

Dividindo ambos os lados por k^2, encontra-se que

$$2(\theta - sen(\theta)) = 1 - cos(\theta)$$

Assim, deseja-se encontrar quando a função

$$g(t) = 2\theta - 2sen(\theta) + cos(\theta) - 1 = 0$$

Para isso, foram utilizados métodos numéricos, de modo que encontrou-se $\theta \approx 1.4013$. Pode-se, então, encontrar k substituindo este valor. Uma vez que

$$k^2 = \frac{2}{\theta - sen(\theta)}$$

Então, tirando a raiz de ambos os lados, econtra-se que

$$k = \sqrt{\frac{2}{\theta - sen(\theta)}}$$

Substituindo o valor de θ encontrado, descobre-se que $k = 2.19362041$ para os pontos x_0, y_0 dados.

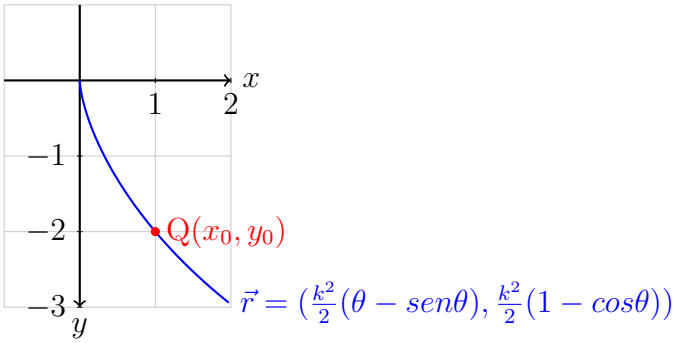


Figura 1.4: Gráfico do cicloide obtido com $k = 2.19$

■

1.1.2 Reações Químicas

Uma reação química de segunda ordem envolve a interação (colisão) de uma molécula de uma substância P com uma molécula de uma substância Q, para produzir uma molécula de uma nova substância X; isto é denotado por $P + Q \to X$.

Suponha que p e q, com $p \neq q$, sejam as concentrações iniciais de P e Q, respectivamente, e seja $x(t)$ a concentração de X no instante t. Então, $p - x(t)$ e $q - x(t)$ são as concentrações de P e Q no instante t, e a taxa de variação da reação é dada pela equação:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(p - x)(q - x),$$

em que α é uma constante positiva.

(a) Sabendo que $x(0) = 0$, determine o valor limite de $x(t)$ quando $t \to \infty$, sem resolver a equação diferencial. Em seguida, resolva o problema de valor inicial e determine $x(t)$ para qualquer instante t.

(b) Se as substâncias P e Q forem iguais, então $p = q$, e a equação torna-se:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(p - x)^2.$$

Sabendo que $x(0) = 0$, determine o valor limite de $x(t)$ quando $t \to \infty$, sem resolver a equação diferencial. Em seguida, resolva o problema de valor inicial e determine $x(t)$ para qualquer instante t.

Solução:
(a) Para $p \neq q$ partimos de

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(p - x)(q - x).$$

Separando variáveis:

$$\int \frac{dx}{(p - x)(q - x)} = \alpha \int dt.$$

Usando frações parciais,

$$\frac{1}{(p - x)(q - x)} = \frac{1}{q - p}\left(\frac{1}{p - x} - \frac{1}{q - x}\right),$$

$$\int \frac{dx}{(p - x)(q - x)} = \frac{1}{q - p}\Big(- \ln|p - x| + \ln|q - x|\Big) + C.$$

Multiplicando por $(q - p)$ e renomeando a constante como $C_1 = (q - p)C$,

$$- \ln|p - x| + \ln|q - x| = \alpha(q - p)t + C_1.$$

Aplicando a condição inicial $x(0) = 0$:

$$- \ln|p| + \ln|q| = C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \ln\left(\tfrac{q}{p}\right).$$

Logo,

$$\ln\left(\frac{q - x}{p - x}\right) = \alpha(q - p)t + \ln\left(\frac{q}{p}\right).$$

Exponentiando:

$$\frac{q - x}{p - x} = \frac{q}{p}\, e^{\alpha(q-p)t}.$$

Resolvendo para x:

$$p(q - x) = q\, e^{\alpha(q-p)t}(p - x),$$

$$x\Big(q\,e^{\alpha(q-p)t}-p\Big)=pq\Big(e^{\alpha(q-p)t}-1\Big),$$

$$\boxed{x(t)=\frac{pq\Big(e^{\alpha(q-p)t}-1\Big)}{q\,e^{\alpha(q-p)t}-p}\,.}$$

Caso 1: $q>p$ (logo $q-p>0$). Então $e^{\alpha(q-p)t}\to\infty$ quando $t\to\infty$. Assim,

$$x(t)=\frac{pq\Big(e^{\alpha(q-p)t}-1\Big)}{q\,e^{\alpha(q-p)t}-p}=\frac{pq\,e^{\alpha(q-p)t}\Big(1-\dfrac{1}{e^{\alpha(q-p)t}}\Big)}{q\,e^{\alpha(q-p)t}\Big(1-\dfrac{p}{q\,e^{\alpha(q-p)t}}\Big)}.$$

Quando $t\to\infty$, $\dfrac{1}{e^{\alpha(q-p)t}}\to 0$ e $\dfrac{p}{q\,e^{\alpha(q-p)t}}\to 0$, portanto

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=p.$$

Caso 2: $q<p$ (logo $q-p<0$). Então $e^{\alpha(q-p)t}\to 0$ quando $t\to\infty$. Assim,

$$x(t)=\frac{pq\Big(e^{\alpha(q-p)t}-1\Big)}{q\,e^{\alpha(q-p)t}-p}=\frac{-pq\Big(1-e^{\alpha(q-p)t}\Big)}{-p\Big(1-\dfrac{q}{p}e^{\alpha(q-p)t}\Big)}=q\cdot\frac{1-e^{\alpha(q-p)t}}{1-\dfrac{q}{p}e^{\alpha(q-p)t}}.$$

Quando $t\to\infty$, $e^{\alpha(q-p)t}\to 0$, logo

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=q.$$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty}x(t)=\min(p,q)\,.}$$

(b) Para $p=q$, a equação fica

$$\frac{dx}{dt}=\alpha(p-x)^2.$$

Separando variáveis:

$$\int\frac{dx}{(p-x)^2}=\alpha\int dt.$$

Com $u=p-x$, $du=-dx$, obtemos

$$\int\frac{dx}{(p-x)^2}=\int\frac{-du}{u^2}=\frac{1}{u}+C=\frac{1}{p-x}+C.$$

Portanto

$$\frac{1}{p-x}=\alpha t+C.$$

Aplicando a condição inicial $x(0) = 0$:

$$\frac{1}{p-0} = C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{p}.$$

Logo

$$\frac{1}{p-x} = \alpha t + \frac{1}{p}.$$

Isolando x,

$$p - x = \frac{1}{\alpha t + \frac{1}{p}} = \frac{p}{1+\alpha p t},$$

$$\boxed{x(t) = p - \frac{p}{1+\alpha p t} = \frac{p^2 \alpha t}{1+\alpha p t}\,.}$$

Para o limite:

$$x(t) = p\left(1 - \frac{1}{1+\alpha p t}\right) = p \cdot \frac{\alpha p t}{1+\alpha p t}.$$

Dividindo numerador e denominador por t,

$$x(t) = p \cdot \frac{\alpha p}{\frac{1}{t} + \alpha p}.$$

Quando $t \to \infty$, temos $\frac{1}{t} \to 0$, logo

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = p.$$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} x(t) = min(p, q).}$$

■

1.2 Modelagem com equações de 2º ordem.

Exercício 1.11 (Modelagem do princípio de Arquimedes) Um bloco cúbico de lado l e densidade de massa ρ por unidade de volume está flutuando em um fluido com densidade de massa ρ_0 por unidade de volume, em que $\rho_0 > \rho$. Se o bloco for mergulhado ligeiramente e depois solto, ele oscilará na posição vertical. Supondo ser possível desprezar o amortecimento viscoso do fluido e a resistência do ar, deduza a equação diferencial do movimento e determine o período do movimento.

Sugestão: use o princípio de Arquimedes: um objeto completa ou parcialmente submerso em um fluido sofre a ação de uma força empurrando-o para cima (o empuxo) de módulo igual ao peso do fluido deslocado.

Solução:
Como foi encontrado no problema 2.3, pode-se descrever a força de empuxo como

$$\vec{F} = -W\vec{k}$$

Em que W é o peso de líquido deslocado. Considera-se $\vec{P}$ o peso do bloco e $\vec{E}$ o empuxo do mesmo. Tem-se que o problema pode ser representado pela seguinte figura:

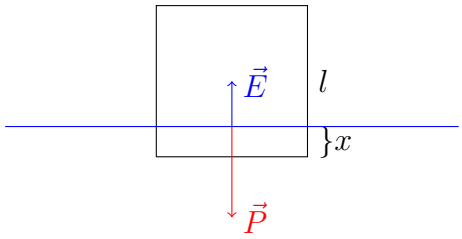


Figura 1.5: Representação gráfica das forças aplicadas no bloco

Assim, pode-se definir o peso do bloco como o produto da densidade do bloco pelo seu volume e a aceleração da gravidade,

$$P = \rho g l^3$$

Por outro lado, uma vez que o empuxo foi definido como o peso de líquido deslocado. Assim, chamando de x a altura do bloco abaixo da água. Assim, seguindo a mesma lógica de escrever o peso como o produto da densidade, gravidade e volume, pode-se escrevê-la como

$$E = \rho_0 g x l^2$$

Então, no momento que esse bloco está em equilíbrio, ele tem uma velocidade inicial e seu movimento pode ser expresso pelo equilíbrio entre as forças, uma vez que são as únicas aplicadas sobre o bloco

$$P - E = F_r$$

O sinal de menos é proveniente do fato de que o peso e o empuxo sempre apontam em sentidos opostos Então, tomando a direção da água como positiva, chega-se a essa relação. Com isso, reescrevendo essas forças,

$$\rho_0 g x l^2 - \rho g l^3 = F_r$$

Com isso, considerando que não há forças dissipativas e que o equilíbrio ocorre apenas entre o empuxo e o peso, pode-se dizer que as forças internas estarão em equilíbrio, de modo que o seu movimento será dado por

$$F_r = m \cdot x''$$

F_r deve ser descrito uma vez que o empuxo varia com base no quão submerso está o bloco e, por isso, nem sempre o peso e o empuxo se anulam. Então, como essa aceleração

será resultante do equilíbrio das forças de empuxo e do peso, pode-se reescrever a equação diferencial isolando o x, de modo que

$$\rho g l^3 x'' + \rho_0 g l^2 x = \rho g l^3$$

De fato, pode-se simplificar essa equação dividindo ambos os lados por gl^2, encontrando, então, que o movimento é descrito por

$$\rho l x'' + \rho_0 x = \rho l$$

A fim de isolar o x'', pode-se dividir ambos os lados por ρl, de modo a encontrar

$$x'' + \frac{\rho_0}{\rho l} x'' = 1$$

Essa equação modela o movimento do bloco oscilando para dentro e para fora da água. Então, é possível determinar o período desse movimento. Para isso, basta considerar que o bloco funciona como um sistema massa mola, oscilando para dentro e para fora da água. De fato, em um sistema massa mola, a sua frequência de oscilação é

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Isto é, a frequência de oscilação ao quadrado é a divisão da constante elástica pela massa do objeto. Abstraindo isso, a constante elástica é o termo que, multiplicado pela distância ao equilíbrio, implica em uma força, ou seja:

$$k \cdot x = F$$

Assim, com base na modelagem ρ_0 age como k. Ademais, a massa do objeto é aquela que, multiplicada pela aceleração do objeto, implica uma força. Ou seja,

$$m \cdot x'' = F$$

Com base na modelagem, isso se equivale a ρl. Assim, substituindo esses valores na equação, encontra-se que a frequência de oscilação é:

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho l}}$$

■

Capítulo 2

Cálculo Vetorial: Alguns problemas exóticos

Exercício 2.1 (Força de atração de um disco em um ponto)

1. Uma lâmina tem densidade constante ρ e o formato de um disco com centro na origem e raio R. Utilize a Lei de Newton da Gravitação

$$F = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$$

para mostrar que a intensidade da força de atração que a lâmina exerce sobre um corpo com massa m colocado em um ponto $(0, 0, d)$ no eixo z positivo é

$$F = 2\pi Gm\rho d\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}}\right)$$

2. Mostre que a intensidade da força de atração da lâmina com densidade ρ que ocupa o plano inteiro sobre um objeto de massa m localizado à distância d do plano é

$$F = 2\pi Gm\rho$$

Observe que esta expressão não deve depender de d.

Solução:

Para encontrar a força gravitacional, primeiro será calculada a massa do disco. Para isso, utiliza-se coordenadas polares, isto é, substitui-se as variáveis x e y por

$$x = rcos(\theta) \text{ e } y = rsen(\theta)$$

O jacobiano dessa transformação pode ser calculado de modo que

$$J = det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Ou seja, tem-se que

$$J = (cos(\theta) \cdot rcos(\theta)) - (-rsen(\theta) \cdot sen(\theta)) = r \cdot (cos^2(\theta) + sen^2(\theta)) = r$$

Assim, a massa do disco pode, enfim, ser escrita como

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho r dr d\theta$$

Então, uma vez que a força é dependente da massa, a força exercida por cada parcela infinitesimal da força pode ser escrita como

$$dF = -\frac{GmdM}{r^3}\vec{r} \tag{2.1}$$

A figura abaixo mostra esse problema, de modo que cada ponto do disco descreve uma linha de força

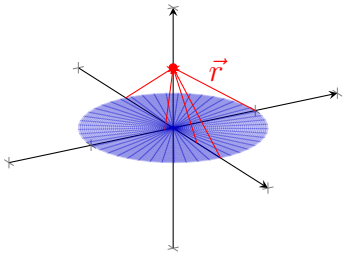


Figura 2.1: Representação gráfica do disco

Então, pode-se observar que o vetor $\vec{r}$ pode ser decomposto em duas partes, v_h que será a parte horizontal e v_z que será a parte vertical do vetor. Então,

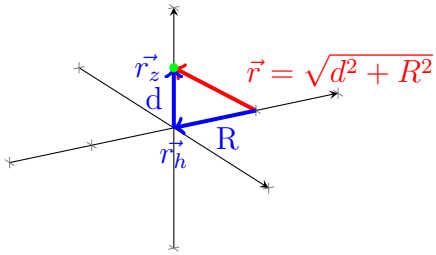


Figura 2.2: Representação gráfica dos vetores decompostos

Essa decomposição vetorial pode ser feita em qualquer ponto do disco, de modo que, no fim, ao somar todos os $\vec{r_h}$, eles se anula. Pode-se dizer isso visto que o disco é simétrico com relação a origem então, por exemplo, a força horizontal do ponto $(1, 0, 0)$ no corpo é igual ao oposto da força horizontal do ponto $(-1, 0, 0)$ no corpo, se cancelando.

Com isso, será importante calcular apenas a força de atração ao longo do vetor $\vec{v_z}$, de modo que

$$F_{\text{final}} = F \cdot \frac{d}{r}\vec{k}$$

Assim, uma vez que r é a distância de cada ponto até o corpo em $(0, 0, 1)$, tem-se que para cada distância dr, haverá uma massa dM no disco tal que a força aplicada na horizontal será

$$dF = \frac{d}{r}\frac{-GmdM}{r^2}\vec{k}$$

Ou seja, substituindo o valor de dM,

$$dF = -\frac{d}{r}\frac{Gm\rho r}{r^2}drd\theta\vec{k}$$

Assim, simplificando os r, basta integrar que se encontra o valor de F.

$$dF = -\frac{dGm\rho}{r^2}drd\theta\vec{k}$$

Vale comenta que, por mais que r no primeiro momento correspondesse ao raio do disco e, agora, expresse a distância do disco até o corpo, sua variação se permanece a mesma. De fato, antes tinha $0 \leq r \leq R$. Agora, no entanto, $d \leq r \leq \sqrt{d^2 + R^2}$. Assim, a variação do comprimento de R se mantém a mesma, uma vez que R é a diferença dos vetores $\vec{r} = \sqrt{d^2 + R^2}$ e $\vec{d}$, observar a imagem **??** que mostra como esses vetores se associam em um ponto da fronteira desse disco.

Com isso, pode-se integrar de ambos os lados de modo que

$$F = -\vec{k}\int_0^{2\pi}\int_d^{\sqrt{d^2+R^2}}\frac{dGm\rho}{r^2}drd\theta$$

O que, ao tirar de dentro da integral os termos que não dependem de r,

$$F = -\vec{k}dGm\rho\int_0^{2\pi}\int_d^{\sqrt{d^2+R^2}}\frac{1}{r^2}drd\theta$$

Então, ao calcular a integral, θ pode sair multiplicando e encontra-se que

$$F = -\vec{k}dGm\rho 2\pi\left[-\frac{1}{r}\right]_d^{\sqrt{R^2+d^2}}$$

Com isso, ao calcular os limites de integração,

$$F = -\vec{k}dGm\rho 2\pi\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{R^2+d^2}}\right)$$

O que, reorganizando, pode ser escrito como

$$\vec{F} = 2\pi Gm\rho d\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{R^2+d^2}}\right)(-\vec{k})$$

Ou seja, a força é aplicada para baixo, como se espera da força gravitacional.

Do mesmo modo, caso esse plano fosse infinito, poderia ser utilizada a mesma expressão para a força. No entanto, uma vez que o raio R seria infinito, poderia-se reescrever o módulo dessa força como

$$F = \lim_{R\to\infty} 2\pi Gm\rho d\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{R^2+d^2}}\right) = 2\pi Gm\rho d\left(\frac{1}{d}\right) = 2\pi Gm\rho$$

E, assim como esperado, a força de um disco infinito não depende de d. ∎

Exercício 2.2 (Tipos de região no $\mathbb{R}^3$) Se f for contínua, mostre que

$$\int_0^x \int_0^y \int_0^z f(t)dtdzdy = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt$$

Solução:

A partir dos limites de integração da integral do enunciado, pode-se concluir que a região W que contém a integral pode ser expressa por:

$$W = \begin{cases} 0 \le t \le z \\ 0 \le z \le y \\ 0 \le y \le x \end{cases}$$

Ou seja, organizando em ordem de tamanho essas variáveis,

$$0 \le t \le z \le y \le x$$

Assim, primeiramente será feita uma mudança na ordem de integração, aplicando o Teorema de Fubini para deixar o dt por último, de modo que

$$\iiint_W f(t)dzdydt$$

Quanto aos limites, uma vez que $t \le z \le y$, esse será o intervalo de integração de z, de modo que

$$\iint \left[\int_t^y f(t)dz\right] dydt = \iint f(t)\cdot(y-t)dydt$$

Então, para y, o mesmo será feito, identificando quais variáveis são maiores e menores que ele. Assim, em um primeiro momento poderia-se escolher os limites $z \le y \le x$, mas, no entanto, como y é um limite de z, não não é interessante fazer isso pois, se não, não seria possível eliminar esta variável. Assim, o menor intervalo de integração possível será $t \le y \le x$, de modo que a integral poderá ser expressa como

$$\int \left[\int_t^x f(t)dy\right] dt = \int f(t)\cdot \frac{(y-t)^2}{2}\bigg|_t^x dt$$

Avaliando essa integral, para $y = x$, encontra-se

$$\int f(t) \cdot \frac{(x-t)^2}{2} dt$$

E, para $y = t$, encontra-se

$$-\int f(t) \cdot \frac{(t-t)^2}{2} dt = 0$$

Quanto aos limites de integração de t, basta ver quais informações presentes na ordem de grandeza das variáveis ainda não foi usada, lembrando que z, y não podem ser utilizados uma vez que suas integrais já foram avaliadas. Assim, chega-se a conclusão de que o intervalo de integração para t deve ser

$$\frac{1}{2}\int_0^x f(t)(x-t)^2 dt$$

Portanto, comprova-se que

$$\int_0^x \int_0^y \int_0^z f(t) dt dz dy = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t) dt$$

■

Exercício 2.3 (Princípio de Arquimedes) Um sólido ocupa uma região E com superfície S e é imerso num líquido com uma densidade constante ρ. Escolhemos um sistema de coordenadas de modo que o plano xy coincida com a super- fície do líquido e valores positivos de z sejam medidos para baixo, adentrando o líquido. Então, a pressão na profundidade z é $p = \rho g z$, onde g é a aceleração da gravidade. A força de empuxo total sobre o sólido devida à distribuição de pressão é dada pela integral de superfície

$$F = -\int\int_s p\vec{n} dS$$

onde $\vec{n}$ é o vetor normal unitário apontando para fora. Mostre que $F = -Wk$, onde W é o peso do líquido deslocado pelo sólido. (Observe que F é dirigida para cima porque z é dirigida para baixo.) O resultado é o Princípio de Arquimedes: A força de empuxo sobre um objeto é igual ao peso do líquido deslocado.

Solução:

Primeiramente, considera-se a pressão como um campo, o que faz sentido considerando que está sendo calculada a integral de superfície da pressão, que é definida como força por área. Concluído que o resultado será, de fato, uma força, nesse caso de empuxo. Após a análise dimensional, ainda é necessário resolver a integral

$$F = -\iint_S p\vec{n} dS$$

No entanto, é dada a relação de que a pressão, em uma profundidade z é dada por $p = \rho g z$, pode-se substituir esse valor na integral, de modo que a força será:

$$F = -\iint_S \rho g z \vec{n} dS = -\rho g \iint_S z \vec{n} dS$$

no entanto, uma vez que o campo z dessa integral é escalar, não é possível aplicar o teorema do divergente. No entanto, é possível demonstrar que

$$\iint_s f \vec{n} dS = \iiint_E \nabla f dV$$

De fato, multiplicando f por um vetor $\vec{c} = \begin{pmatrix} c & c & c \end{pmatrix}$ constante, tem-se

$$F = f \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} fc & fc & fc \end{pmatrix}$$

Assim, para calcular a integral de superfície de F pode-se utilizar do teorema de Gauss, de modo que:

$$\iint_S f \cdot \vec{c} \cdot \vec{n} dS = \iiint_E \nabla \cdot (f \cdot \vec{c}) dV = \iiint_E \nabla f \cdot \vec{c} dV$$

Nesse caso, uma vez que f é escalar ele pode estar multiplicando o "vetor"gradiente, no caso $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$. Assim, ao efetuar o produto escalar entre cada entrada de ∇f e c, encontra-se

$$c \cdot \int \nabla F dV = c \cdot \begin{pmatrix} \int F_x dV \\ \int F_y dV \\ \int F_z dV \end{pmatrix} = \int c F_x dV + \int c F_y dV + \int c F_z dV = \int c \cdot F dV$$

Com isso, é possível dizer que o teorema do divergente, para um campo escalar, pode ser escrito como

$$c \cdot \iint_S f n dS = c \cdot \iiint_E \nabla f dV$$

Assim, após dividir ambos os lados por c, encontramos que o fluxo pelo sólido será a integral do gradiente de f. Assim, utilizando isso na integral tripla do problema:

$$\iiint_E \nabla f dV = \iiint_E \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} dV$$

Aplicando isso ao problema, uma vez que f só depende de z as integrais parciais em x e y são nulas, de modo que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \end{pmatrix} \iiint_E dV = \rho g V \vec{k}$$

Reorganizando esse resultado, primeiramente a densidade e o volume podem ser multiplicados a fim de obter a massa do sólido, uma vez que

$$\rho \cdot V = m$$

Então, a massa pode ser multiplicada pela aceleração da gravidade para encontrar o peso, de modo que

$$m \cdot g = W$$

Assim, uma vez que

$$\iiint_E \nabla f dV = W\vec{k}$$

E, segundo o teorema do divergente,

$$\iint_S pndS = \iiint_E \nabla f dV$$

Então

$$F = -\iiint_E \nabla f dV = -W\vec{k}$$

Em que W é o peso do líquido deslocado pelo sólido. Então, assim como diz o princípio de Arquimedes, a força de empuxo pode ser escrita como

$$F = -W\vec{k}$$

■

Exercício 2.4 (Ângulo sólido) Seja S uma superfície parametrizada suave e seja P um ponto tal que cada reta que comece em P intercepte S no máximo uma vez. O ângulo sólido $|\Omega(S)|$ subentendido por S em P é o conjunto de retas a partir de P e passando por S. Seja $S(a)$ a interseção de $\Omega(S)$ com a superfície da esfera com centro em P e raio a. Então, a medida do ângulo sólido (em estereoradianos) é definida como

$$|\Omega(S)| = \frac{\text{área de } S(a)}{a^2}$$

Aplique o Teorema do Divergente para a parte de $\Omega(S)$ entre $S(a)$ e S e mostre que

$$|\Omega(S)| = \iint_S \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^3} dS$$

onde $\vec{r}$ é o vetor radial de P a um ponto qualquer sobre S, $r = |r|$, e o sentido do vetor normal unitário $\vec{n}$ é dirigido para longe de P.

Isso mostra que a definição de medida de um ângulo sólido independe do raio a da esfera. Assim, a medida do ângulo sólido é igual à área subtendida sobre uma esfera unitária (observe a analogia com a definição da medida em radianos). O ângulo sólido total sub- tendido por uma esfera em seu centro é, portanto, 3π esterradianos.

Solução:
Considerando o ângulo sólido como o fluxo do campo

$$F = \frac{\vec{r}}{r^3}$$

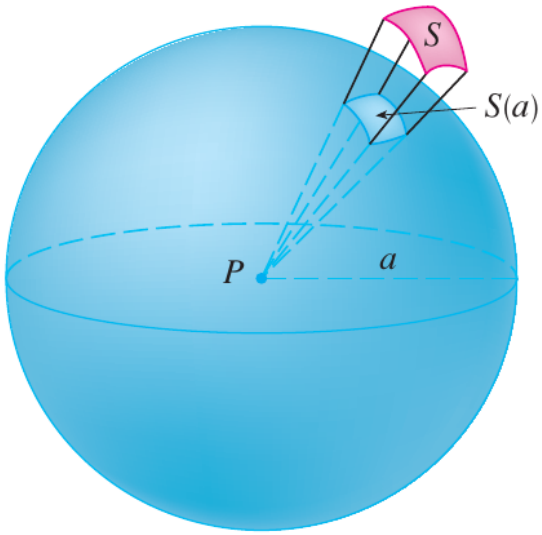


Figura 2.3: ângulo sólido

que passa pela superfície da esfera. Pode-se fechar essa superfície considerando o ślido com bases em S e $S(a)$ e fechado pela lateral destes. Assim, pode-se escrever o fluxo por essas faces como

$$\iint_S FndS + \iint_{S(a)} FndS + \iint_{S_{lat}} FndS = \Phi$$

Considerando que o campo F é radial, uma vez que consiste das retas que saem da origem e passam pelas faces, isso significa que o fluxo por essa lateral será nulo, uma vez que há um ângulo de 90^o entre a normal dessa superfície e o campo. Assim, o fluxo também pode ser escrito com o Teorema do divergente, uma vez que $\bar{S} = S \cup S(a) \cup S_{lat}$ consiste em uma superfície fechada. Assim, usando o teorema e zerando o fluxo pela superfície S_{lat} tem -se

$$\iint_S FndS + \iint_{S(a)} FndS = \iiint_W divFdV$$

É necessário, então calcular o divergente de F, ou seja calcular

$$\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Se $\vec{r}$ for escrito como $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$, o campo será expresso por

$$\frac{\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}}{||\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}||^3}$$

A norma do vetor r ao cubo será, uma vez que genericamente é um vetor (x, y, z)

$$r^3 = ||\vec{r}||^3 = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$$

e, por isso, o divergente será

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Para facilitar o cálculo, primeiro será calculada a derivada com relação a x desse campo. Isso tem como resultado

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1\cdot(x^2+y^2+z^2)^{3/2}-x\cdot\frac{3}{2}\cdot(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

Reorganizando esse resultado, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}-x^2\cdot 3\cdot(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

Uma vez que as demais derivadas só muda-se o x de cima pelas demais variáveis, tem-se que, analogamente, a derivada com relação a y será

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}-y^2\cdot 3\cdot(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

E, com relação a z

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}-z^2\cdot 3\cdot(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

Então, reescrevendo o resultado do divergente como a soma das derivadas parciais, ele pode ser escrito como

$$\frac{3\cdot(x^2+y^2+z^2)^{3/2}-(x^2+y^2+z^2)\cdot 3\cdot(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

Ao fazer a multiplicação que está na parte da direita do numerador, tem-se que a fração é

$$\frac{3\cdot(x^2+y^2+z^2)^{3/2}-3\cdot(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}=0$$

Assim, uma vez que o divergente é zero e não há fluxo pela superfície lateral do sólido, pode-se escrever o fluxo como

$$\iint_S FndS+\iint_{S(a)} FndS=0$$

Ou seja, separando os dois termos,

$$\iint_S FndS=-\iint_{S(a)} FndS \tag{2.2}$$

Assim, expandindo essa equação,

$$\iint_S \frac{\vec{r}}{r^3} n dS = -\iint_{S(a)} \frac{\vec{r}}{r^3} n dS$$

Com isso, tratando do lado direito, na integral sobre a superfície da esfera, $r = a$ uma vez que está no limite do sólido. Então,

$$-\iint_{S(a)} \frac{\vec{r}}{r^3} n dS = -\iint_{S(a)} \frac{1}{a^2} n dS$$

Uma vez que a é o raio da esfera, e por isso constante, essa integral pode ser reescrita como

$$-\frac{1}{a^2}\iint_{S(a)} n dS = -\frac{\text{Área}(S(a))}{a^2}$$

Então, uma vez que a definição de ângulo sólido é

$$|\Omega(S)| = \frac{\text{área de} S(a)}{a^2}$$

Segundo a equação 2.2, podemos dizer que

$$\iint_S \frac{\vec{r}}{r^3} n dS = |\Omega(S)|$$

■

Exercício 2.5 (Maximização de uma integral de linha) Encontre uma curva fechada simples C para a qual o valor da integral de linha

$$\int_C (y^3 - y)dx - 2x^3 dy$$

é máxima.

Solução:

Deseja-se maximizar a integral dada mas, para facilitar isso, ela pode ser reescrita como

$$\int_C \vec{F} \cdot dr$$

Em que o vetor $\vec{F}$ pode ser expresso como

$$F = \begin{pmatrix} y^3 - y \\ -2x^3 \end{pmatrix}$$

Então, como C se trata de uma curva fechada, pode-se aplicar o Teorema de Green nela, de modo que

$$\int_C F dr = \iint_S \frac{\partial}{\partial x}(-2x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(y^3 - y) dA$$

Assim, calculando essas derivadas,

$$\int_C F dr = \iint_S -6x^2 - 3y^2 + 1 dA$$

Uma vez que, em dimensões maiores o gradiente funciona como uma derivada, o máximo dessa integral dupla pode ser encontrado quando

$$\nabla \iint_S -6x^2 - 3y^2 + 1 dA = 0$$

Dado que $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$, este pode cortar com a integral de modo que encontramos o valor de extremo quando

$$-6x^2 - 3y^2 + 1 = 0$$

Assim, passando o 1 para a direita e multiplicando ambos os lados por -1, encontra-se que

$$6x^2 + 3y^2 = 1$$

Essa equação corresponde à elipse de raio, em x, igual a $\frac{1}{6}$ e, em y, igual a $\frac{1}{3}$. Assim, qualquer ponto nessa elipse representa um valor de máximo para essa integral.

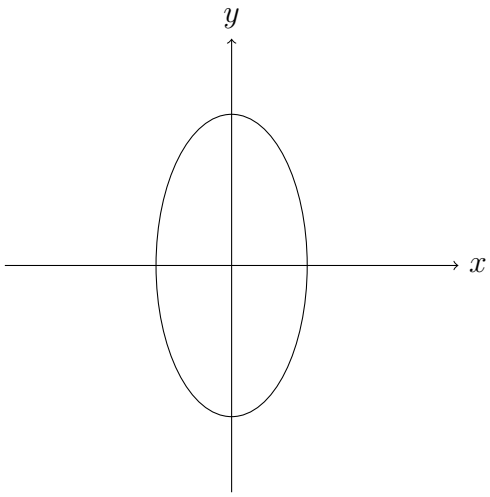


Figura 2.4: Elipse que representa a solução

■

Exercício 2.6 (Área de um plano delimitado por uma curva) Seja C uma curva espacial simples fechada suave por partes que esteja contida em um plano com vetor unitário normal $\vec{n} = (a, b, c)$ e orientada positivamente em relação a $\vec{n}$.
Mostre que a área do plano delimitada por C é

$$\frac{1}{2} \int_C (bz - cy)dx + (cx - az)dy + (ay - bx)dz$$

Solução:
O campo dessa integral de linha por ser expresso como o vetor:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bz \end{pmatrix}$$

Ademais, uma vez que C é uma curva fechada, é possível aplicar o teorema de Stokes nela, isto é, pode-se dizer que

$$\int_C F dr = \iint_S \text{rot} F dS$$

Onde S consiste na projeção da curva C no plano. Assim, pode-se reescrever a equação dada como

$$\frac{1}{2}\int_C (bz - cy)dx + (cx - az)dy + (ay - bx)dz = \frac{1}{2}\iint_S \nabla \times F dS$$

Então, fazendo o cálculo do rotacional de F, encontra-se que

$$\nabla \times F = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ bz - cy & cx - az & ay - bx \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Com isso, uma vez que o vetor normal ao plano é $\vec{n} = (a, b, c)$, pode-se reescrever o resultado do rotacional de F como

$$\nabla \times F = 2 \cdot \vec{n}$$

Substituindo isso na integral de superfície encontrada,

$$\frac{1}{2}\int_C (bz - cy)dx + (cx - az)dy + (ay - bx)dz = \iint_S \vec{n} dS$$

Assim, uma vez que se tem a integral de superfície com apenas o vetor normal correndo por ela, encontra-se que, de fato,

$$\frac{1}{2}\int_C (bz - cy)dx + (cx - az)dy + (ay - bx)dz = \text{área de } C \text{ no plano}$$

■

Exercício 2.7 (Elipsoide cortado por um plano) O plano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ com } a > 0, b > 0, c > 0$$

corta o elipsoide sólido

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1$$

Em dois pedaços. Encontre o volume do pedaço menor.

Solução:

A fim de facilitar a manipulação desse elipsoide, será feita uma mudança de variável em que

$$u = \frac{x}{a}, v = \frac{y}{b}, t = \frac{z}{c}$$

De modo que, então, o plano pode ser descrito pela equação

$$u + v + t = 1$$

E o elipsoide se torna uma esfera de raio 1, dada por

$$u^2 + y^2 + t^2 \leq 1$$

A fim de encontrar o volume da menor parte do elipsoide, o Jacobiano dessa transformação precisa ser calculado. Assim, ele pode ser calculado por

$$J = det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = abc$$

Encontrada essa nova base, fica mais fácil observar como esse plano e essa esfera se interceptam. A partir disso o seguinte gráfico foi feito, para facilitar a observação.

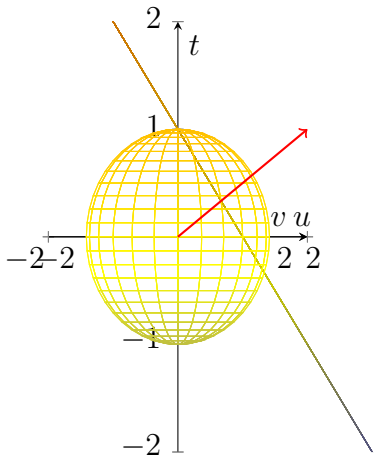


Figura 2.5: Representação gráfica da esfera cortada pelo plano

A fim de encontrar o volume dessa menor parte da esfera será feita outra mudança de variável, considerando o novo eixo t na direção do vetor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Assim, para encontrar a distância em relação a esse novo eixo será feita uma projeção de qualquer vetor que ligue a capa da esfera ao vetor $\vec{n}$.

A partir disso, percebe-se que o ponto mais próximo da origem ao plano está a uma distância de

$$d = \frac{\left| \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \vec{n} \right|}{||\vec{n}||} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Assim, para utilizar coordenadas esféricas para o cálculo desse volume, o raio irá variar no intervalo $[\frac{1}{\sqrt{3}}; 1]$. O ângulo azimutal θ, varia de no intervalo $[0; 2\pi]$ e para descobrir o ângulo ϕ utilizaremos a definição do eixo t, que na base canônica equivale a z. Assim, nas coordenadas esféricas, como

$$z = \rho cos(\phi)$$

considerando z como t, e dado que o menor valor de t encontrado é de $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$, pode-se escrever esse eixo em função de ρ, ϕ como

$$t = \rho cos(\phi) \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Então, dividindo ambos os lados por ρ,

$$cos(\phi) \geq \frac{1}{\rho\sqrt{3}}$$

Quanto menor o ângulo ϕ, maior é o cosseno. Desse modo, ao aplicar o arcocosseno em ambos os lados, invertendo a desigualdade:

$$\phi \leq arccos(\frac{1}{\rho\sqrt{3}})$$

Com isso, pode-se calcular o volume a partir da integral

$$V_b = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \int_0^{arccos(\frac{1}{\rho\sqrt{3}})} \rho^2 sen(\phi) d\phi d\rho d\theta$$

Uma vez que não há nenhum componente com θ, pode-se já avaliar essa integral. Ademais, avaliando a componente ϕ

$$V_b = 2\pi \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \rho^2 \cdot (-cos(arccos(\frac{1}{\rho\sqrt{3}})) + cos(0) d\rho$$

Por fim, avaliando ρ e simplificando o resultado chega-se ao resultado:

$$V_b = 2\pi \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \rho^2 - \frac{\rho}{\sqrt{3}} d\rho = 2\pi(\frac{1}{3} - \frac{4}{9\sqrt{3}})$$

No entanto, esse é o volume na base u, v, t. A fim de saber o volume da menor parcela do elipsoide é necessário multiplicar esse resultado pelo jacobiano, uma vez que, assim, será corrigida a alteração das áreas devido à transformação linear. Assim, o volume do pedaço menor do elipsoide é

$$V = V_b \cdot J = abc2\pi(\frac{1}{3} - \frac{4}{9\sqrt{3}})$$

■

Exercício 2.8 (Trabalho e Energia Cinética) Suponha $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, com $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$, representando uma força resultante.

Sob a ação dessa força $\vec{F}$, uma partícula de massa m se desloca de A até B, onde:

$$A = \gamma(a), \quad B = \gamma(b), \quad \gamma : [a, b] \to \Omega$$

Sejam v_a e v_b as velocidades escalares nos instantes a e b. Vamos provar que:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m \left(v_b^2 - v_a^2 \right)$$

Ou seja, o trabalho realizado pela força resultante no deslocamento de A até B é igual à variação da energia cinética K.

Solução:

Seja $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ e $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$. Pela 2ª lei de Newton, a força sobre a partícula é:

$$\vec{F}(\gamma(t)) = m \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{1}$$

Por outro lado:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt$$

Substituindo (1):

$$= \int_a^b m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt$$

Note que:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\, \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Portanto:

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$$

Assim:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) dt = \frac{m}{2} \left[v^2(t) \right]_a^b = \frac{1}{2} m (v_b^2 - v_a^2)$$

■

Exercício 2.9 (Conservação da Energia Mecânica) Sob as hipóteses do problema anterior, suponha agora que $\vec{F}$ seja conservativa, ou seja, existe um campo escalar $E_p : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\vec{F} = -\nabla E_p$$

onde E_p é chamado de energia potencial associada a $\vec{F}$.

Seja m a massa da partícula e $\vec{F}$ a única força atuando sobre ela. Para $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ e t_0 fixo, o trabalho realizado entre t_0 e t é:

$$\int_{\gamma(t_0)}^{\gamma(t)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_p(\gamma(t_0)) - E_p(\gamma(t))$$

Solução:
Pelo resultado do problema anterior:

$$\int_{\gamma(t_0)}^{\gamma(t)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_c(t) - E_c(t_0)$$

onde $E_c(t) = \frac{1}{2}mv^2(t)$ é a energia cinética.

Igualando as duas expressões para o trabalho:

$$E_p(\gamma(t_0)) - E_p(\gamma(t)) = E_c(t) - E_c(t_0)$$

ou seja:

$$E_p(\gamma(t)) + E_c(t) = E_p(\gamma(t_0)) + E_c(t_0)$$

Definindo a energia mecânica total:

$$E_M(t) = E_p(\gamma(t)) + \frac{1}{2}mv^2(t)$$

concluímos que:

$$E_M(t) = E_M(t_0) = \text{constante}$$

ou seja, a energia mecânica é conservada.

■

Exercício 2.10 (Motor de 4 tempos) A figura retrata a sequência de eventos em cada cilindro de um motor de quatro cilindros de combustão interna. Cada pistão se move para cima e para baixo e está ligado por um braço-pivô ao virabrequim. Sejam P(t) e V(t) a pressão e o volume dentro de um cilindro no instante t, onde a > t > b é o tempo necessário para um ciclo completo. O gráfico mostra como P e V variam durante um ciclo em um motor de quatro tempos.

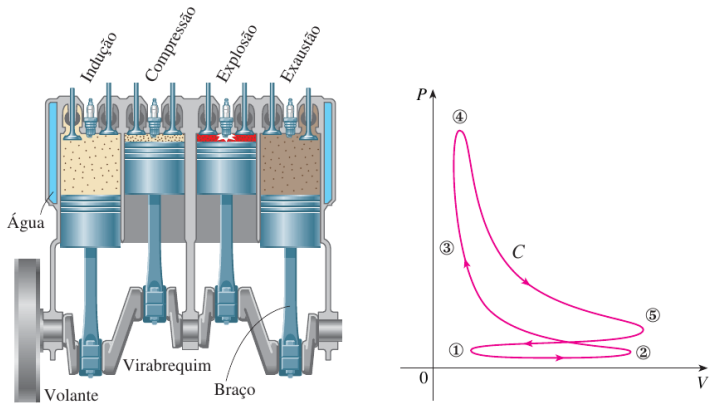


Figura 2.6: Ilustração do motor de 4 tempos e gráfico relacionado

Durante o estágio de indução (de 1 a 2) a mistura de ar e gasolina à pressão atmosférica é aspirada para o interior do cilindro pela válvula de entrada à medida que o pistão se move para baixo. Então, o pistão comprime rapidamente a mistura com a válvula fechada, no estágio de compressão (de 2 a 3), durante o qual a pressão aumenta e o volume diminui. Em 3 uma faísca proveniente da vela de ignição provoca a combustão da mistura, elevando a temperatura e a pressão com um volume praticamente constante até 4. Em seguida, com a válvula fechada, uma rápida expansão do volume força o pistão para baixo durante o estágio de potência (de 4 a 5). A válvula se abre, a temperatura e a pressão caem e a energia mecânica armazenada no volante em rotação impulsiona o pistão para cima, forçando a saída dos gases que se formaram no interior pela válvula, no estágio de exaustão. A válvula de exaustão se fecha e a válvula de entrada se abre. Estamos de volta a 1 e o ciclo se reinicia.

1. Mostre que o trabalho realizado pelo pistão durante um ciclo de um motor de quatro tempos é $W = \int_c PdV$, onde C é a curva no plano PV mostrada na figura. [Dica: Seja $x(t)$ a distância do pistão até o topo do cilindro e observe que a força sobre o pistão é $F = AP(t)i$, onde A é a área do topo do pistão. Então $W = \int_C F \cdot dr$, onde C1 é dado por $r(t) = x(t)i$, $a \leq t \leq b$. Um modo alternativo é trabalhar diretamente com as somas de Riemann.]

2. Use a Fórmula 16.4.5 para mostrar que o trabalho é a diferença das áreas englobadas pelos dois laços de C.

Solução:
Após ser feita uma análise física da situação, pode-se dizer que

$$F = AP(t)i$$

O que é consequência da definição de pressão, $P = \frac{F}{A}$. Ademais, pode-se encontrar o volume do gás dentro do pistão a partir da variável $x(t)$, definida como a distância do topo do pistão até o topo do cilindro. Com isso,

$$V(t) = A \cdot x(t)$$

O que evidencia que o volume varia com o tempo. Ademais, a partir da definição de trabalho,

$$W = \int_C F dr$$

Ao calcular isso, aplicando a força do pistão e o deslocamento em x, deve-se encontrar o trabalho executado pelo motor. Desse modo, encontra-se que

$$W = \int_C F dr$$

Mas considerando que $r(t) = x(t)i$, $dr = x'\vec{i}dt$

$$W = \int_C F\vec{i} \cdot x'\vec{i}dt$$

Agora, uma vez que se tem $V(t) = A \cdot x(t)$ pode-se fazer outra mudança de variáveis, de modo que se tenha

$$\frac{dV}{dt} = A \cdot x'(t) \Rightarrow \frac{dV}{A} = x'(t)dt$$

De modo que, ao substituir na equação, ao mesmo tempo em que observa-se que o produto escalar entre os vetores $\vec{i}$ é 1, encontra-se

$$W = \int_C \frac{F}{A} dV$$

Mas, como já havia sido descrito, a definição de pressão é força aplicada em uma área, assim

$$W = \int_C P dV$$

Ademais, pode-se demonstrar que trabalho total feito será a diferença da área de cada laço do gráfico. Para isso, é necessário aplicar o Teorema de Stokes, segundo o qual

$$\int_C F dr = \iint_S rot F dS$$

Mais especificamente, como o problema está em duas dimensões, pode-se resumir esse teorema ao Teorema de Green. Assim, a integral de linha pode ser reescrita como

$$\int_C F dr = \iint_S \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}$$

Onde $F = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$. No entanto, segundo o gráfico apresentado, a curva C pode ser dividida em duas curvas fechadas, $C = C_1 \cup C_2$, as quais serão, respectivamente, a curva de baixo e a de cima. Ademais, dividindo as curvas desse modo, percebe-se que elas possuem orientações distintas, de modo que C_1 está no sentido anti-horário e C_2 está no sentido horário. Desse modo

$$\int_C F dr = \int_{C_1} F dr + \int_{C_2^-} F dr = \iint_{S_1} \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} dS - \iint_{S_2} \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} dS$$

Assim, considerando que o gráfico está na base V, P, as derivadas parciais serão tiradas nesse eixo. Ademais, como a força não é vetorial, uma vez que os vetores diretores foram multiplicados, $F = (A, B) = P$. Assim, ao aplicar no Teorema de Green:

$$\int_C F dr = \int_{S_1} \frac{\partial P}{\partial V} - \frac{\partial P}{\partial P} dS - \int_{S_2} \frac{\partial P}{\partial V} - \frac{\partial P}{\partial P} dS = \int_{S_1} -1 dS - \int_{S_2} -1 dS = A(S_2) - A(S_1)$$

A partir disso, percebe-se que a integral de linha, que como foi observado é igual ao trabalho, de fato, pode ser calculada a partir da diferença de áreas. Assim, é verdadeiro que

$$W = A(S_2) - A(S_1)$$

■

Capítulo 3

Ondas de água

3.1 Equações de Stokes

Será Modelado o comportamento de um fluído. Um fluído é um aglomerado de partículas que estão tão próximas que ele pode ser considerado como um corpo contínuo. O Fluído modelado terá algumas especificidades:

- Fluído incompressível:

  Uma força ou pressão aplicada sobre ele não irá reduzir seu volume.

- Fluído não viscoso:

  Não há atrito interno no fluído que dificulte seu escoamento.

Define-se que o fluído ocupa a região limitada $\Omega(t)$ em um instante t, se desloca com uma velocidade $u(x,t)$, onde u é um campo vetorial de 3 dimensões $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$; uma vez que as ondas se deslocam no mundo real em problemas físicos.

É definido, ainda, que o fluído tem uma densidade $\rho(x,t)$, de tal modo que sua massa será dada por:

$$M(t) = \int_{\Omega(t)} \rho(x,t) dV$$

Assim, ao avaliar a variação da massa em função do tempo, pode-se reescrever a equação como

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega(t)} \rho(x,t) dV$$

Para que seja possível avaliar essa variação em função do tempo, será criado um mapa $X(y,t)$ tal que $\forall y \in U_0$, sendo U_0 uma região fixa inicial, $X(y,t)$ fornece a posição x em $U(t)$. Com isso, é possível acompanhar todas as partículas que compõem esse fluído, avaliando portanto sua variação em função do tempo. Reescrevendo matematicamente,

$$X : \begin{cases} \Omega_0 & \to \Omega(t) \\ y & \mapsto X(y,t) = x \end{cases}$$

A partir disso, vale notar que $\frac{\partial X}{\partial t}$ equivale a uma variação da posição x. Portanto, pode-se associar a velocidade a essa derivada de modo que $\frac{\partial X}{\partial t} = \vec{u}$. Feitas essas considerações, pode-se aplicar a derivada à integral a fim de resolvê-la. Assim, fazendo a mudança de variável para y:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} \rho(x,t)dx = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{U_0} \rho\Big(X(y,t),t\Big)J(y,t)dy$$

Como U_0 é fixo, ele não sofre qualquer alteração com a derivada em relação ao tempo. Portanto, esta pode ser inserida dentro da integral de modo que, ao aplicar as regras de derivação:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} \rho(x,t)dx = \int_{\Omega_0} \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}J + \rho\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}dy \tag{3.1}$$

Como ρ é uma função de $X(y,t),t$, ao aplicar a regra da cadeia:

$$\frac{\mathrm{d}\rho(X,t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\rho}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Como $X(y,t) = x(t)$, pode-se reescrever a derivada de ρ com relação ao mapa como $\nabla_x\rho$. Ademais, substituindo $\frac{\partial X}{\partial t}$ pela velocidade, a derivada total é reescrita como

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \nabla_x\rho\vec{u} + \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Quando à derivada do jacobiano, primeiro é pertinente lembrar de sua definição. Para uma transformação dada por $x = g(u,v), y = h(u,v)$, ele será igual a

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}$$

Aplicando isso à transformação realizada, é o mesmo que escrever que

$$J = \frac{\partial(X)}{\partial(y)} = \frac{\partial X}{\partial y}$$

Como x e y representam não só uma coordenada, mas sim uma diferencial volumétrica (tridimensional), x, y são vetores. Assim, o jacobiano é, na verdade (com $x = (x,y,z)$ e $y = (u,v,w)$,

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Portanto, ao expandir o determinante de eJ , encontra-se que

$$J = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial v}$$

O que pode ser reescrito, colocando os termos da primeira linha em evidência:

$$J = \frac{\partial x}{\partial u}(\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial v}) + \frac{\partial x}{\partial v}(\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}) + \frac{\partial x}{\partial w}(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u})$$

Fazendo o mesmo para as demais linhas, tem-se um equivalente à regra da cadeia aplicada ao jacobiano, de modo que - a cada hora - uma delas será a que está em evidência (a derivada está sendo aplicada). Portanto, reescrevendo o determinante simplificadamente,

$$\frac{\partial J}{\partial t} = det\begin{pmatrix} \frac{\partial^3 \dot{x}}{\partial u\,\partial v\,\partial w} \\ \frac{\partial^3 y}{\partial u\,\partial v\,\partial w} \\ \frac{\partial^3 z}{\partial u\,\partial v\,\partial w} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} \frac{\partial^3 x}{\partial u\,\partial v\,\partial w} \\ \frac{\partial^3 \dot{y}}{\partial u\,\partial v\,\partial w} \\ \frac{\partial^3 z}{\partial u\,\partial v\,\partial w} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} \frac{\partial^3 x}{\partial u\,\partial v\,\partial w} \\ \frac{\partial^3 y}{\partial u\,\partial v\,\partial w} \\ \frac{\partial^3 \dot{z}}{\partial u\,\partial v\,\partial w} \end{pmatrix}$$

Reescrevendo $\dot{x} = u_1$, $\dot{y} = u_2$ e $\dot{z} = u_3$ como as componentes da velocidade. Considerando o primeiro determinante, pode-se fazer simplificações ao considerar as velocidades relacionadas a cada direção.

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial u} = \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

Como u_1 está na direção de dx, apenas esse termo não é nulo. Portanto, a primeira linha do primeiro determinante pode ser reescrita como

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial^3 x}{\partial u\,\partial v\,\partial w}$$

Substituindo isso na equação, como as demais linhas não sofrem quaisquer alterações, é o mesmo que escrever

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \cdot det\left(\frac{\partial^3 (x,y,z)}{\partial (u\,\partial v\,\partial w)}\right) = \frac{\partial u_1}{\partial x} J$$

Repetindo o mesmo passo nos demais determinantes, encontra-se que

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) = J(\nabla \cdot \vec{u})$$

Portanto, analisadas as variações com relação a ρ e a J, pode-se retornar à equação (3.1), de modo que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} \rho(x,t)dx = \int_{\Omega_0} (\nabla_x \rho\vec{u} + \frac{\partial \rho}{\partial t})J + \rho(J(\nabla \cdot \vec{u}))dy$$

Com isso, é possível na integral sobre o volume Ω_0, colocar o jacobiano em evidência

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} \rho(x,t)dx = \int_{\Omega_0} [\nabla_x \rho\vec{u} + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \vec{u})]Jdy$$

Permite-nos retornar às variáveis iniciais, retornando à região Ω. Ademais, reescrevendo $\nabla\rho\vec{u} + \rho(\nabla \cdot \vec{u} = \nabla \cdot (\rho\vec{u})$, omitindo o argumento de Ω e reescrevendo a diferencial volumétrica como dV obtêm-se a seguinte equação:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} \rho(x,t)dx = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{u})dV$$

Agora, uma vez que a massa se conserva - baseado na lei de conservação de massas - a derivada deve ser nula. Portanto, a equação é escrita simplesmente como

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{u})dV = 0$$

Como Ω é arbitrário, a integral pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{u}) = 0$$

Como o líquido é incompressível, sua densidade não varia no tempo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

A densidade será, então, escrita como

$$\rho(x,t) = \rho_0$$

Assim, só resta da conservação de massa que

$$div(\rho_0 u) = 0$$

E, uma vez que ρ é constante, pode-se dividir ambos os lados por este, encontrando

$$div(\vec{u}) = 0 \tag{3.2}$$

Por outro lado, será tratada a quantidade de movimento do fluido. Define-se que a quantidade de movimento como o produto da massa pela velocidade.

$$Q = M \cdot u$$

Então, tomando uma parte infinitesimal desse fluído, o momento de cada partícula será:

$$dQ = dM \cdot u$$

Mas, como a massa infinitesimal pode ser reescrita como

$$dM = \rho dV$$

Rescrevemos o movimento como

$$dQ = \rho dV u$$

Integrando de ambos os lados na região Ω, chega-se à conclusão de que o momento é dado por

$$Q(t) = \int_\Omega \rho u(x,t) dV = \rho \int_\Omega u(x,t) dV$$

Segundo a primeira lei de Newton, a variação do momento de um corpo é igual à força resultante sobre ele. Assim,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \rho \int_\Omega u(x,t) dV = F_r = \sum F$$

Assim, será tratada a força resultante como a somatória das forças externas aplicadas no fluído. Desse modo, serão consideradas duas forças distintas

- Força da gravidade

  Essa força atua sobre todas as partículas da mesma fora. Ela é escrita de modo geral como

  $$F_1(t) = \int \rho \vec{g} dV$$

  Como $\vec{g}$ e ρ são constantes, essa força pode ser reescrita como

  $$F_1(t) = \rho \begin{pmatrix} 0 & 0 & -g \end{pmatrix} \int_\Omega dV = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -gM \end{pmatrix}$$

- Pressão do fluído

  Uma vez que não vai ser considerada a viscosidade do fluído, a única força interna a ele será a normal exercida pelo líquido que circunda as partículas. Toda partícula estará rodeada por fluído o qual está exercendo força nela pelo contato. Assim, existirá a pressão normal.

  A pressão é a força dividida pela área, então a força será dada por

  $$F_2(t) = \int_{\partial\Omega} -p(x) \vec{n} dS$$

  Em que considera-se apenas o bordo da partícula uma vez que é uma interação de superfície. Ademais o sinal negativo se deve pelo fato de que a pressão estará comprimindo as partículas, como uma força expansiva.

Assim, a força resultante será a soma destas:

$$F(t) = F_1 + F_2 = \int_\Omega \rho_0 g dV - \int_{\partial\Omega} p(x) \vec{n} dS$$

Aplicando novamente o Teorema de Gauss

$$F(t) = \int_\Omega \rho_0 g - div(p(x)) dV$$

Agora, uma vez que de acordo com a lei de Newton a variação do momento é igual à força resultante,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho\int_\Omega u(x,t)dV = \int_\Omega \rho_0 g - div(p(x))dV$$

Para o cálculo dessa variação do movimento, será tratado o lado direito dessa igualdade. Para cada componente u_i do vetor $\vec{u}$ será calculada a variação. Assim, cada u_i será tratado como um campo escalar, seguindo o raciocínio de (**??**)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho u_i dV = \int_\Omega \rho\frac{\partial u_i}{\partial t}dV + \int_{\partial\Omega}\rho u_i\cdot\vec{u}\cdot\vec{n}dS$$

Assim, pelo teorema de Gauss

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho u_i dV = \int_\Omega \rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + div(\rho u_i\cdot\vec{u})dV$$

Agora, é necessário calcular $div(u_i\vec{u})$, o que, aplicando a regra da cadeia

$$\nabla\cdot(u_i\vec{u}) = (\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_j})\vec{u} + u_i(\nabla\cdot\vec{u})$$

Como a partir de (3.2), podemos reescrever esse divergente ao passar o vetor para dentro da somatória e somar as 3 componentes em u_i como

$$\nabla\cdot(u_i\vec{u}) = (\sum_{j=1}^{3}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}) = \sum_{i=1}^{3}(\vec{u}\cdot\nabla)u_i = (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}$$

Assim, a variação do momento pode ser escrita como

$$\int_\Omega \rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u\cdot\nabla)udV = \int_\Omega \rho_0 g - div(p(x))dV$$

Em que, uma vez que Ω é arbitrário,

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u\cdot\nabla)u = \rho_0 g - div(p(x))$$

Dividindo ambos os lados por ρ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u = g - \frac{1}{\rho}div(p(x))$$

Que ao reorganizar para isolar as constantes se torna

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u + \frac{1}{\rho}div(p(x)) = g$$

Que é a equação de Euler do movimento de fluidos. Assim, a dinâmica dos fluidos não viscosos pode ser descrita pelas equações de Stokes:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u + \frac{1}{\rho}div(p(x)) = g\\ div(u) = 0\end{cases} \tag{3.3}$$

3.2 Ondas na superfície livre

Obtida a equação que descreve o comportamento do líquido, são necessárias algumas condições de contorno a fim de que o problema seja bem posto. Será considerado, portanto, um lago com fundo liso, ilimitado nas direções x e y e cuja profundidade é igual a $h_o > 0$. O contorno do lago, portanto, ocorre no seu fundo e em sua superfície, de modo que devem ser analisadas estas situações.

Assim, dado que tratamos o líquido (água) como homogênea e não viscosa - considerações feitas na Lei da Conservação da Massa -, as partículas do fundo devem se deslocar tangencialmente a ele, uma vez que é liso. Assim:

$$u_3 \cdot \vec{n} = 0$$

Quanto à superfície do líquido, a situação é um pouco mais complexa uma vez que o deslocamento das partículas não é homogêneo. Assim, consideramos que existe uma função

$$S(t, x, y, z) = 0$$

que a parametrize. Assim, dado que a trajetória das partículas é dada por $P(t)$, de modo que

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = u(t, P(t)) = u(t, x)$$

Logo a superfície pode ser reescrita como

$$S(t, P(t)) = 0$$

Considerando o movimento na superfície, pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t} \tag{3.4}$$

Expandindo a derivada com relação a P:

$$\frac{\partial S}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial x} & \frac{\partial S}{\partial y} & \frac{\partial S}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} = u \cdot \nabla S$$

Ou seja, a equação (3.4) pode ser reescrita como

$$S_t + u \cdot \nabla S = 0$$

Tomando $S(t, x)$ como o gráfico de uma função parametrizada

$$z = \eta(t, x, y)$$

A equação pode ser reescrita, tomando novamente sua variação,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \eta(t, x(t), y(t))}{\partial t}$$

De modo que

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Assim, como a variação da posição em relação ao tempo é definida como a velocidade,

$$u_3 = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x}u_1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}u_2$$

Assim, obtemos as condições de contorno:

$$\begin{cases} u_3 = 0 \text{ em } z = -h_o \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x}u_1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}u_2 - u_3 = 0 \text{ em } z = \eta(t, x, y) \end{cases}$$

Portanto, o problema completo das ondas em superfície livre pode ser descrito por:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho} div(p(x)) = g \\ div(u) = 0 \\ u_3 = 0 \text{ em } z = -h_o \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x}u_1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}u_2 - u_3 = 0 \text{ em } z = \eta(t, x, y) \end{cases}$$

3.3 Equação de Bernoulli

Foi descrito o movimento de um fluído não viscoso e homogêneo mas, no entanto, é possível desconsiderar mais condições desse fluído a fim de simplificar ainda mais a equação obtida. Assim surge a equação de Bernoulli, na qual se considera que o fluído é irrotacional, isto é, partículas individuais não se rotacionam. Assim, tomaremos

$$rot\vec{u} = 0$$

No entanto, surge um problema já que não há nenhum rotacional na equação obtida. Utiliza-se, portanto, a identidade:

$$\frac{1}{2}\nabla(u \cdot u) = u \times rotu + (u \cdot \nabla)u$$

Com isso, a identidade se torna, zerando o rotacional,

$$\frac{\nabla|u|^2}{2} = (u \cdot \nabla)u$$

Então, substituindo esse valor na equação de Euler do movimento,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\nabla|u|^2}{2} + \frac{\nabla p(x)}{\rho_0} = g$$

A partir dessa equação, ao substituir $u = \nabla\psi$, a equação de Euler do movimento pode ser reescrita como

$$\nabla\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{|\nabla\psi|^2}{2} + \frac{p(x)}{\rho_0}\right) = \nabla\Big(- gz\Big)$$

A mudança em g é justificada uma vez que havia-se o vetor $\begin{pmatrix}0 & 0 & -g\end{pmatrix}$, o que pode ser reescrito como o gradiente utilizado. Assim, pode-se reescrever a equação como

$$\nabla\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{|\nabla\psi|^2}{2} + \frac{p(x)}{\rho_0} + gz\right) = 0$$

Assim, como o gradiente atua como uma derivada em dimensões maiores, pode-se integrar a equação para encontrar o valor para ψ. De fato, integrando essa equação,

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{|\nabla\psi|^2}{2} + \frac{p(x)}{\rho_0} + gz = C(t)$$

em que C é constante com relação ao espaço, isso é, ainda pode ser uma função do tempo. Assim, para nos livrar dessa constante, supomos que $C(t) = 0$ e, ainda, é considerada uma função ϕ tal que

$$\phi = \psi - D(t)$$

Em que $D(t)$ é uma primitiva de $C(t)$. Com isso, é verdade que

$$\nabla\phi = \nabla\psi - C(t) \Rightarrow \nabla\phi = \nabla\psi = u$$

Assim, pode-se reescrever a equação do movimento de Euler novamente, desta vez na forma da chamada equação de Bernoulli

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + \frac{p(x)}{\rho_0} + gz = 0 \tag{3.5}$$

Assim, reescrevendo a equação diferencial parcial que modela o problema, agora em função de ϕ, e as condições de contorno obtêm-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + \frac{p(x)}{\rho_0} + gz = 0 \\ div(\phi) = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \text{ em } z = -h_o \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \text{ em } z = \eta(t,x,y) \end{cases} \tag{3.6}$$

3.4 O fenômeno da dispersão

As equações obtidas em (3.6) descrevem bem o problema das ondas de superfície livre mas não é possível resolvê-las explicitamente. Assim, para-se obter informações relevantes acerca desse problema, devem ser feitas algumas simplificações.

Primeiro, uma vez que na superfície $z = \eta(t, x, y)$, essa mesma parametrização será utilizada no componente que descreve a força da gravidade sobre a onda. Se, junto a essa mudança, for feita a consideração de que a pressão é constante e só atua sob a superfície, obtêm-se que

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + g\eta = 0 \text{ em } z = \eta(t, x, y) \\ div(\phi) = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ em } z = -h_o \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ em } z = \eta(t, x, y) \end{cases}$$

Ademais, para incluir a pressão na função, pode-se definir $\tilde{\phi} = \phi + \frac{p}{\rho_0}$ de modo que as equações possam ser reescritas como

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \frac{|\nabla \tilde{\phi}|^2}{2} + g\eta = 0 \text{ em } z = \eta(t, x, y) \\ div(\tilde{\phi}) = 0 \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} = 0 \text{ em } z = -h_o \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} = 0 \text{ em } z = \eta(t, x, y) \end{cases} \tag{3.7}$$

De fato, os demais $\tilde{\phi}$ se mantêm sem alterações uma vez que todos os demais consideram alguma derivada de ϕ, o que elimina a presença da pressão uma vez que esta está sendo considerada constante.

Para além dessas simplificações, ainda se supõe que:

- Toda oscilação na superfície é pequena de modo que a oscilação de cada ponto é suficientemente pequena para que possa se considerar $z = 0$
- As variações de η e ϕ em relação a qualquer uma das variáveis é muito pequena, ou seja,

$$|\frac{\partial \eta}{\partial t}|, |\frac{\partial \phi}{\partial t}|, |\frac{\partial \eta}{\partial x}|, ... \ll 1$$

Assim, pode-se desconsiderar os termos não lineares, $\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}$ e $\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y}$, e o gradiente de ϕ (uma vez que serão muito pequenos e multiplicam entre si) e consideremos que a onda pertence à região $R = (x, y, z); -h_0 < z < 0$, de modo que o problema se torna

$$\begin{cases} div(\tilde{\phi}) = 0 \text{ em } R \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} = 0 \text{ em } z = -h_o \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + g\eta = 0 \text{ em } z = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} = 0 \text{ em } z = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Para solucionar esse problema, primeiro pode-se notar que $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z}$ em na superfície superior da onda. Assim, ao derivar a terceira equação em relação ao tempo, é possível

eliminar essa última

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \text{ em } z = 0 \tag{3.9}$$

Para facilitar a resolução, primeiro se considera que a onda se move em relação ao eixo x. Assim, resolvendo pela separação de variáveis, ϕ pode ser escrita como

$$\phi(t, x, z) = T(t)X(x)Z(z)$$

A partir do divergente, obtêm-se que

$$\frac{X''}{X} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

Ou seja, separando as variáveis

$$\frac{Z''}{Z} = -\frac{X''}{X} = \mu$$

Em que μ é uma constante que não depende de z nem de x. com isso, considerando a equação diferencial ordinária obtida com relação a x,

$$X'' = -\mu X$$

Obtém-se a solução (considerando que $\mu = k^2$):

$$X = A_1 cos(kx) + A_2 sen(kx)$$

do mesmo modo, resolvendo em relação a Z, tem-se a EDO:

$$Z'' = \mu Z$$

cuja solução e a soma de exponenciais

$$Z = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}$$

Considerando a condição de contorno que $\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$ em $z = -h_0$, pode-se determinar melhor o que é a função Z

$$Z_t = C_1 k e^{kh_0} - C_2 k e^{-kh_0} = 0$$

A fim de se determinar os valores das constantes, observa-se a igualdade:

$$C_1 k e^{kh_0} = C_2 k e^{-kh_0}$$

No entanto, como k é constante e diferente de zero, pode-se dividir ambos os lados por k, de modo que

$$C_1 e^{kh_0} = C_2 e^{-kh_0} = \frac{C}{2}$$

Em que C é uma constante a ser definida. Portanto, isolando as constantes de Z, obtêm-se

$$C_1 = \frac{C}{2}e^{-kh_0} \text{ e } C_2 = \frac{C}{2}e^{kh_0}$$

Substituindo na equação original,

$$Z = C_1e^{kz} + C_2e^{-kz}$$

Considerando a condição de contorno $\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$ em $z = -h_0$, pode-se determinar melhor o que é a função Z

$$Z' = C_1ke^{-kh_0} - C_2ke^{kh_0} = 0$$

A fim de se determinar os valores das constantes, observa-se a igualdade:

$$C_1ke^{-kh_0} = C_2ke^{kh_0}$$

No entanto, como k é constante e diferente de zero, pode-se dividir ambos os lados por k, de modo que

$$C_1e^{-kh_0} = C_2e^{kh_0} = \frac{C}{2}$$

Em que C é uma constante a ser definida. Portanto, isolando as constantes de Z, obtêm-se

$$C_1 = \frac{C}{2}e^{kh_0} \text{ e } C_2 = \frac{C}{2}e^{-kh_0}$$

Substituindo na equação original tem-se,

$$Z = \frac{C}{2}e^{kh_0}e^{kz} + \frac{C}{2}e^{-kh_0}e^{-kz}$$

Assim, a função Z pode ser reescrita como

$$Z = C \cdot \frac{(e^{kz+kh_0} + e^{-kz-kh_0})}{2} = C \cdot cosh(kz + kh_0) \tag{3.10}$$

Por fim, falta agora determinar T. Assim, utiliza-se a equação encontrada em (3.9) substituindo os valores de X e Z já encontrados encontra-se que

$$XZT'' + gXTZ' = 0$$

No entanto, ao dividir por XZ e considerar que a terceira equação só se aplica na fronteira em que $z = 0$,

$$T'' + Tg\frac{Z'}{Z} = 0$$

Ao mesmo tempo em que, dividindo também por T, essa equação se torna

$$\frac{T''}{T} = -g\frac{Z'}{Z} = -\omega^2$$

Logo, resolvendo a EDO com relação a T, busca-se uma solução

$$T'' = -\omega^2 T$$

Ou seja, T deve seguir que

$$T'' + \omega^2 T = 0$$

O que, ao voltar à equação antes da divisão por T, pode-se substituir o valor de Z pelo encontrado em (3.10),

$$T'' + Tg \cdot \frac{Ck \cdot senh(kz + kh_0)}{C \cdot cosh(kz + kh_0)} = 0$$

Como $z = 0$ nessa condição, pode-se simplificar a equação como

$$T'' + Tgk \cdot tanh(kh_0) = 0$$

Assim, encontra-se que $\omega^2 = gktanh(kh_0)$. Essa é a chamada relação de dispersão e é a ferramenta que permite definir e analisar as diferentes velocidades associadas à propagação da onda obtêm-se a seguinte expressão para T:

$$T(t) = T_1 cos(\omega t) + T_2 sen(\omega t)$$

Por tanto, a função ϕ pode ser escrita como o produto entre X, Z, T ou seja

$$\phi = (A_1 cos(kx) + A_2 sen(kx)) \cdot C \cdot cosh(kz + kh_0) \cdot (T_1 cos(\omega t) + T_2 sen(\omega t))$$

Assim, a partir da terceira equação de (3.8), pode-se reescrever com o ϕ encontrado, lembrando que essa condição de fronteira vale para $z = 0$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = (A_1 cos(kx) + A_2 sen(kx)) \cdot C \cdot cosh(kh_0) \cdot (-T_1 \omega sen(\omega t) + T_2 \omega cos(\omega t)) + g\eta = 0$$

Desse modo, isolando η, ele pode ser escrito como :

$$\eta(t, x) = -\frac{\omega}{g} cosh(kh_0) \cdot (A_1 cos(kx) + A_2 sen(kx)) \cdot (T_2 cos(\omega t) - T_1 sen(wt))$$

Isso descreve o movimento da superfície do lago e, a partir desse e das grandezas ω e k, é possível definir algumas propriedades desse movimento. Primeiro, como a tudo que depende de x, o espaço, e t, tempo, está definido por senos e cossenos, é claro que essa onda será periódica.

Ademais, a velocidade de fase dessa onda também pode ser calculada. Esta consiste na velocidade com que um ponto de fase constante como a crista de uma onda se propaga no espaço. Ela pode ser calculada como

$$v_f = \frac{\omega}{k}$$

Isso faz sentido ao pensar fisicamente quanto a essas variáveis. ω é a frequência da onda e k é o número de onda, uma análogo à frequência para o comprimento que descreve

o número de ondas por unidade de comprimento. Assim, a análise dimensional faz sentido ao pensar que a divisão destes constitui uma velocidade. Assim, substituindo o valor de ω,

$$v_f(k) = \frac{\sqrt{gktanh(kh_0)}}{k}$$

Quanto à velocidade de grupo, esta é a velocidade com que o conjunto de ondas se move. Ela pode ser calculada como

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

Assim, substituindo o valor de ω, pode ser calculada como

$$v_g = \frac{\partial}{\partial k}\sqrt{gktanh(kh_0)}$$

O que, multiplicando em cima e embaixo por ω para remover a raiz e derivando o produto,

$$v_g = \frac{1}{2\omega}(gtanh(kh_0) + gksech^2(kh_0) \cdot h_0)$$

Expandindo a secante hiperbólica e a tangente e colocando em evidência g, encontra-se:

$$v_g = \frac{g}{2\omega}\left[\frac{senh(kh_0)}{cosh(kh_0)} + \frac{kh_0}{cosh^2(kh_0)}\right]$$

Multiplicando, novamente, em cima e embaixo por ω^2, substituindo embaixo por $\omega^2 = gktanh(kh_0)$, tem-se que

$$v_g = \frac{g}{2\omega} \cdot \frac{\omega^2}{gktanh(kh_0)} \cdot \left[\frac{senh(kh_0)}{cosh(kh_0)} + \frac{kh_0}{cosh^2(kh_0)}\right]$$

Pode-se simplificar alguns termos para encontrar que e agrupar ω e k para encontrar

$$v_g = \frac{\omega}{k}\frac{1}{2tanh(kh_0)} \cdot \left[\frac{senh(kh_0)}{cosh(kh_0)} + \frac{kh_0}{cosh^2(kh_0)}\right]$$

O que, substituindo $\frac{\omega}{k}$ como a definição da velocidade de fase, pode-se reescrever a velocidade de grupo como

$$v_g = \frac{v_f}{2tanh(kh_0)} \cdot \left[tanh(kh_0) + \frac{kh_0}{cosh^2(kh_0)}\right]$$

Então, simplificando a tangente hiperbólica,

$$v_g = \frac{v_f}{2} \cdot \left[1 + \frac{kh_0}{cosh(kh_0)senh(kh_0)}\right]$$

Com a identidade $senh(2x) = 2 \cdot senh(x)cosh(x)$, pode-se reescrever essa equação como

$$v_g = \frac{v_f}{2} \cdot \left[1 + \frac{2kh_0}{senh(2kh_0)}\right]$$

Assim, pode-se escrever a expressão para a velocidade de grupo como:

$$v_g = \frac{v_f}{2} + \frac{v_f kh_0}{senh(2kh_0)}$$

A partir disso, é possível entender como será o comportamento das ondas em dois meios diferentes (regimes): em águas rasas e em águas profundas. O que os diferencia é a dispersividade do meio, que é calculada a partir das diferenças entre v_f e v_g.

3.4.1 Dispersão em águas rasas

Em águas rasas, vamos considerar que a profundidade do corpo d'água será desprezível com relação ao comprimento de onda, ou seja ($h \ll \lambda$). Primeiro, considere que exista uma bola de raio ϵ em que vale que $\forall x \in B(0;\epsilon) \Rightarrow tanh(x) \approx x$. Isso pode ser facilmente visto por meio de um gráfico como o a seguir.

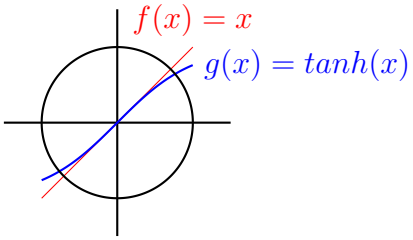


Figura 3.1: Proximidade entre $f(x) = x$ e $g(x) = tanh(x)$

De fato, com essa aproximação é possível aproximar $tanh(kh_0) \approx kh_0$. Substituindo isso na expressão para ω:

$$\omega^2 = gktanh(kh_0) = gk^2h_0$$

Assim, no cálculo da velocidade de fase:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{gk^2h_0}}{k} = gh_0$$

Portanto, uma vez que a velocidade de grupo é definida como

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

É possível reescrever ω como $k \cdot v_f$ o que, nesse caso, leva a

$$v_g = \frac{\partial}{\partial k} k v_f = v_f = \sqrt{gh_0}$$

Nesse caso, como a velocidade de grupo é igual à velocidade de fase, considera-se que essa onda não é dispersiva. Espera-se que em regime de águas rasas as ondas mantenham as distâncias entre si, independentemente de seu comprimento elas viajam com a mesma velocidade.

3.4.2 Dispersão em águas profundas

Consideram-se águas profundas quando ($kh_0 \gg 1$). Quando isso ocorre, é possível aproximar o valor da tangente hiperbólica a 1. Isso pode, novamente, ser percebido por meio de um gráfico como o a seguir:

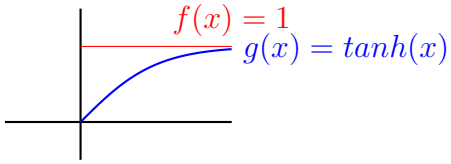


Figura 3.2: Proximidade entre $y = 1$ e $g(x) = tanh(x)$

Assim, para x suficientemente grande, fazer a aproximação $tanh(x) \approx 1$. Com isso, considerando o cálculo de ω,

$$\omega^2 = gktanh(kh_0) \approx gk$$

Assim, calculando a velocidade de fase:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{gk}}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

Agora, a velocidade de fase depende de k, o que implica que não é mais constante para todas as ondas. Assim, quanto menor k, isto é maior comprimento de onda, mais rapidamente viajam as ondas. Calculando agora a velocidade de grupo:

$$v_g = \frac{\partial}{\partial k}\omega = \frac{\partial}{\partial k}\sqrt{gk}$$

Assim, expandindo essa derivada, tem-se que

$$v_g = \frac{1}{2}\frac{g}{\sqrt{gk}} = \frac{1}{2}v_f$$

Portanto, como $v_g \neq v_f$, em águas profundas as ondas são dispersivas. Elas não viajam juntas. Isso explica o por que de tsunamis não serem perceptíveis em alto mar, só tornando-se visíveis ao aproximar da costa e entrar no regime de águas rasas.

3.5 Dedução da KdV

A KdV é uma equação não linear que descreve o movimento de ondas em canais rasos com o perfil de "sólitons". Chama-se assim qualquer onda localizada no espaço que se propaga com velocidade e perfil contantes.

Para deduzir essa equação, deve-se partir de (3.8), desconsiderando o eixo y. De fato, ao expandir os gradientes e divergentes, ela pode ser reescrita como:

$$\begin{cases} \phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \\ \phi_z = 0 \text{ em } z = -h_0 \\ \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g\eta = 0 \text{ em } z = \eta(t,x) \\ \eta_t + \phi_x\eta_x - \phi_z = 0 \text{ em } z = \eta(t,x) \end{cases} \tag{3.11}$$

Uma vez que deseja-se modelar ondas águas rasas, considerando que seu comprimento λ é muito maior que a profundidade h_0 da água, a velocidade de fase pode ser reescrita como

$$c(k)^2 = c_0^2 = gh_0$$

O k foi omitido uma vez que, como já foi encontrado, o número de onda não afeta a velocidade da onda final nesse regime. Assim, é possível definir $t_0 = \frac{\lambda}{c_0}$, uma vez que $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ e $t = \frac{2\pi}{\omega}$ (a presença do 2π se dá pelo fato dessa ser a frequência angular). Assim, possuindo o comprimento de onda λ, período t_0, profundidade h_0 e a parametrização da superfície, é possível descrever essa dinâmica com variáveis adimensionais. Assim, usa-se

$$\xi = \frac{x}{\lambda} \text{ , } \tau = \frac{t}{t_0} \text{ , } \zeta = 1 + \frac{z}{h_0}$$

Ademais, para eliminar a parametrização da superfície, define-se

$$v = \frac{\eta}{a}$$

Em que v é a amplitude adimensional das oscilações e a uma amplitude típica.

Então, substituindo isso na terceira equação de (3.11), encontra-se:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2\right] + g \cdot va = 0$$

Expandindo as regras da cadeia, as derivadas podem ser escritas como

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\frac{1}{t_0} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\frac{1}{h_0}\right)^2\right] + g \cdot va = 0$$

Dividindo todos os termos por $a \cdot g$ e substituindo o valor de t_0, pode-se reescrever a equação como

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\frac{c_0}{\lambda ga} + \frac{1}{2ag}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\frac{1}{h_0}\right)^2\right] + v = 0$$

Agora, colocando em evidência o h_0^2 no segundo termo, obtêm-se a seguinte equação

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\frac{c_0}{\lambda ga}+\frac{1}{2agh_0^2}\left(\phi_\xi^2\frac{h_0^2}{\lambda^2}+\phi_\zeta^2\right)+v=0$$

Lembrando que isso é válido em $z=\eta(t,x)$, ou seja, nas variáveis independentes,

$$z=\eta\Rightarrow(\zeta-1)h_0=va$$

Assim, dividindo por h_0 e somando um a ambos os lados, a equação é válida na condição de fronteira:

$$\zeta=1+\frac{va}{h_0}$$

Ademais, para simplificar essa equação, são definidas Φ,μ e ν, todas adimensionais uma vez que todas as grandezas dessa equação são adimensionais. Assim,

$$\Phi=\frac{c_0}{ag\lambda}\phi\ ,\ \mu=\frac{h_0^2}{\lambda^2}\text{ e }\nu=\frac{a}{h_0}$$

Com isso, a equação pode ser reescrita como

$$\Phi_\tau+\frac{1}{2}\nu\Phi_\xi^2+\frac{1}{2}\frac{\nu}{\mu}\Phi_\zeta^2+v=0\text{ em }\zeta=1+\nu v$$

Fazendo o mesmo nas demais equações, para a primeira, uma vez que a segunda derivada com a regra da cadeia pode ser expressa como

$$\phi_{xx}=\partial_x(\phi_\xi\xi_x)=\phi_{\xi\xi}\cdot\xi_x\cdot\xi_x+\phi_\xi\cdot\xi_{xx}$$

Pode-se substituir isso na equação, de modo que

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\phi_{\xi\xi}\cdot(\xi_x)^2+\phi_\xi\cdot\xi_{xx}+\phi_{\zeta\zeta}\cdot(\zeta_z)^2+\phi_\zeta\cdot\zeta_{zz}=0$$

Como ξ e ζ possuem segunda derivada igual a zero, essa equação pode ser simplificada para

$$\phi_{\xi\xi}(\xi_x)^2+\phi_{\zeta\zeta}(\zeta_z)^2=0$$

Assim, expandindo as derivadas:

$$\phi_{\xi\xi}(\frac{1}{\lambda})^2+\phi_{\zeta\zeta}(\frac{1}{h_0})^2=0$$

Então, multiplicando ambos os lados por h_0^2, encontra-se

$$\phi_{\xi\xi}(\frac{h_0}{\lambda})^2+\phi_{\zeta\zeta}=0$$

O que pode ser simplificado com o parâmetro μ, de modo que

$$\phi_{\xi\xi}\mu + \phi_{\zeta\zeta} = 0$$

Por fim, ainda é possível substituir ϕ por Φ. Uma vez que $\Phi = \frac{c_0}{ag\lambda}\phi$, pode-se isolar ϕ, de modo que $\phi = \frac{ag\lambda}{c_0}\Phi$. Com isso, substituindo na equação,

$$\frac{ag\lambda}{c_0}(\Phi_{\xi\xi}\mu + \Phi_{\zeta\zeta}) = 0$$

Dividindo ambos os lados por $\frac{ag\lambda}{c_0}$, então, obtêm-se:

$$\Phi_{\xi\xi}\mu + \Phi_{\zeta\zeta} = 0$$

Isso é válido em $-h_0 < z < \eta$. Assim, substituindo em termos de ζ, quando $z = -h_0$, $\zeta = 0$. Quando $z = \eta$, $\zeta = 1 + \frac{av}{h_0}$. Assim, escrevendo em termos de ζ, essa região compreende:

$$0 < \zeta < 1 + \frac{a}{h_0}v$$

Com o uso do parâmetro $\nu = \frac{a}{h_0}$,

$$0 < \zeta < 1 + \nu v$$

Com a segunda equação, é mais simples. utilizando a definição de ζ,

$$\phi_z = \phi_\zeta \cdot \zeta_z = 0$$

Logo, substituindo a regra da cadeia, encontra-se que

$$\phi_\zeta \cdot \frac{1}{h_0} = 0$$

É possível, também substituir ϕ por Φ, de modo análogo ao que foi feito anteriormente.

$$\Phi_\zeta \cdot \frac{ag\lambda}{c_0 h_0} = 0$$

Dividindo ambos os lados pelas constantes $\frac{ag\lambda}{c_0 h_0}$, uma vez que não são nulas, encontra-se que

$$\Phi_\zeta = 0$$

Isso é válido em $z = -h_0$, o que, nas novas variáveis, é o mesmo que:

$$\zeta = 1 + \frac{-h_0}{h_0} = 0$$

Quanto à quarta equação, expandindo as derivadas com a regra da cadeia nas novas coordenadas:

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial\eta}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0$$

Isso, considerando as definições de τ, ξ e ζ:

$$\eta_\tau \frac{1}{t_0} + \phi_\xi \frac{1}{\lambda} \cdot \eta_\xi \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{h_0} = 0$$

Substituindo o η para terminar a mudança de variável,

$$(va)_\tau \frac{c_0}{\lambda} + \phi_\xi \cdot (va)_\xi \frac{1}{\lambda^2} - \phi_\zeta \frac{1}{h_0} = 0$$

Reorganizando a equação, uma vez que a é constante, e multiplicando por $\frac{\lambda^2}{h_0}$,

$$v_\tau \frac{\lambda a c_0}{h_0} + \phi_\xi \cdot v_\xi \frac{a}{h_0} - \phi_\zeta \frac{\lambda^2}{h_0^2} = 0$$

Agora, utilizando os parâmetros definidos bem como a grandeza Φ, a equação é reescrita por:

$$v_\tau \frac{\lambda a c_0}{h_0} + \frac{ag\lambda}{c_0} \Phi_\xi \cdot v_\xi \nu - \frac{ag\lambda}{c_0} \Phi_\zeta \frac{1}{\mu} = 0$$

Por fim, como $c_0^2 = gh_0$, pode-se multiplicar e dividir por c_0 o primeiro termo da equação, de modo que

$$v_\tau \frac{\lambda a}{c_0 h_0} \cdot g h_0 + \frac{ag\lambda}{c_0} \Phi_\xi \cdot v_\xi \nu - \frac{ag\lambda}{c_0} \Phi_\zeta \frac{1}{\mu} = 0$$

Simplificando a equação,

$$v_\tau \frac{\lambda a g}{c_0} + \frac{ag\lambda}{c_0} \Phi_\xi \cdot v_\xi \nu - \frac{ag\lambda}{c_0} \Phi_\zeta \frac{1}{\mu} = 0$$

Portanto, dividindo ambos os lados por $\frac{\lambda a g}{c_0}$, obtêm-se a seguinte equação:

$$v_\tau + \nu \Phi_\xi v_\xi - \frac{1}{\mu} \Phi_\zeta = 0$$

Isso vale na superfície, ou seja, $\zeta = 1 + \nu v$. Assim, as equações de (3.11) podem ser reescritas como

$$\begin{cases} \Phi_{\xi\xi}\mu + \Phi_{\zeta\zeta} = 0 \text{ em } 0 < \zeta < 1 + \nu v \\ \Phi_\zeta = 0 \text{ em } \zeta = 0 \\ \Phi_\tau + \frac{1}{2}\nu\Phi_\xi^2 + \frac{1}{2}\frac{\nu}{\mu}\Phi_\zeta^2 + v = 0 \text{ em } \zeta = 1 + \nu v \\ v_\tau + \nu \Phi_\xi v_\xi - \frac{1}{\mu}\Phi_\zeta = 0 \text{ em } \zeta = 1 + \nu v \end{cases} \tag{3.12}$$

Feita essa mudança de variáveis, deseja-se procurar uma solução para Φ como uma série de potências em ζ. Assim, deseja-se encontrar uma Φ que siga:

$$\Phi(\tau, \xi, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n f_n(\tau, \xi)$$

A partir da segunda equação de (3.12), tem-se que, em $\zeta = 0$, $\Phi_\zeta = 0$ .Assim,

$$\Phi_\zeta(\tau, \xi, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} n\zeta^{n-1} f_n(\tau, \xi) = 0$$

Assim, como $\zeta = 0$, apenas quando $n = 1$ é possível estudar f_n. Nesse caso,

$$\Phi_\zeta = 1 \cdot \zeta^0 f_1 = 0$$

Com isso, é necessário que f_1 seja nula.

Considerando a primeira equação agora, é preciso, antes, escrever como seriam as segundas derivadas de Φ para substituí-las. Quanto a ξ:

$$\Phi_{\xi\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_n(\tau, \xi)$$

Fazendo o mesmo para ζ:

$$\Phi_{\zeta\zeta} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\zeta^{(n-2)} f_n(\tau, \xi)$$

Para utilizar essas equações na primeira equação de (3.12), é necessário somá-las. Assim, é interessante que possuam a mesma potência de ζ para que seja possível colocá-la em evidência. Portanto, $\Phi_{\zeta\zeta}$ pode ser reescrito como:

$$\Phi_{\zeta\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\zeta^n f_{n+2}(\tau, \xi)$$

Assim, substituindo na equação:

$$\mu \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_n(\tau, \xi) + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n-1)\zeta^n f_{n+2}(\tau, \xi) = 0$$

Separando as somatórias para os dois lados da equação, encontra-se que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu \cdot \zeta^n \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_n(\tau, \xi) = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\zeta^n f_{n+2}(\tau, \xi)$$

Como ambos os lados possuem a somatória, é possível analisar como será o comportamento a cada termo. Assim, para cada n:

$$\mu \cdot \zeta^n \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_n(\tau, \xi) = -(n+2)(n+1)\zeta^n f_{n+2}(\tau, \xi)$$

Então, como há ζ^n em ambos os lados, é possível simplificá-los, de modo que:

$$\mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_n(\tau, \xi) = -(n+2)(n+1) f_{n+2}(\tau, \xi)$$

Portanto a somatória é definida recursivamente. Uma vez que $f_1 = 0$, necessariamente todas as demais f's ímpares também o serão. Assim, só há termos pares. Ademais, Isolando f_{n+2},

$$f_{n+2} = \mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_n \frac{-1}{(n+2)(n+1)}$$

Assim, por exemplo, f_2 pode ser calculada por:

$$f_2 = \frac{-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_0$$

Do mesmo modo, f_4 pode ser calculada por:

$$f_4 = \frac{-\mu}{4 \cdot 3} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_2 = \frac{\mu^2}{4 \cdot 3 \cdot 2} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} f_0$$

E isso segue para os demais termos. Assim, é possível escrever uma regra geral - na forma de série de potências, ou seja, retornando ζ^n - na forma de:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta^{2n} \mu^n}{(2n)!} \frac{\partial^{2n}}{\partial \xi^{2n}} f_0$$

Para facilitar a leitura e distinguir a função, pode-se fazer a substituição de n por k e de f_0 por f. Assim, Φ pode ser escrita como:

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mu^k \frac{\zeta^{2k}}{(2k)!} \frac{\partial^{2k}}{\partial \xi^{2k}} f \tag{3.13}$$

Agora, é possível utilizar a função Φ encontrada nas condições de contorno da superfície quando $\zeta = 1 + \nu v$ de (3.12). Para evitar que haja muitos termos com potências grandes, serão utilizados somente os três primeiros termos de Φ. Assim, considera-se que

$$\Phi = f - \mu \frac{\zeta^2}{2} f_{\xi\xi} + \mu^2 \frac{\zeta^4}{4!} f_{\xi\xi\xi\xi} - ...$$

Para substituir na equação, primeiro é necessário calcular as derivadas.

$$\phi_\xi = f_\xi - \mu \frac{\zeta^2}{2} f_{\xi\xi\xi} + \mu^2 \frac{\zeta^4}{4!} f_{\xi\xi\xi\xi\xi}$$

Quanto à derivada com relação a ζ:

$$\Phi_\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \mu^k 2k \cdot \frac{\zeta^{(2k)-1}}{(2k)!} \frac{\partial^{2k}}{\partial \xi^{2k}} f$$

Assim, os dois primeiros termos serão:

$$\Phi_\zeta = -\mu\zeta f_{\xi\xi} + \mu^2 \frac{\zeta^3}{3!} f_{\xi\xi\xi\xi}$$

Substituindo na quarta equação,

$$v_\tau + \nu v_\xi (f_\xi - \mu \frac{\zeta^2}{2} f_{\xi\xi\xi} + \mu^2 \frac{\zeta^4}{4!} f_{\xi\xi\xi\xi\xi}) - \frac{1}{\mu}(-\mu\zeta f_{\xi\xi} + \mu^2 \frac{\zeta^3}{3!} f_{\xi\xi\xi\xi}) = 0$$

Dadas as condições de contorno, $\zeta = 1 + \nu v$. Substituindo isso na equação:

$$v_\tau + \nu v_\xi (f_\xi - \mu \frac{(1+\nu v)^2}{2} f_{\xi\xi\xi} + \mu^2 \frac{(1+\nu v)^4}{4!} f_{\xi\xi\xi\xi\xi}) - \frac{1}{\mu}(-\mu(1+\nu v) f_{\xi\xi} + \mu^2 \frac{(1+\nu v)^3}{3!} f_{\xi\xi\xi\xi}) = 0$$

Definindo $w = f_\xi$ para simplificar a notação, a equação é reescrita como

$$v_\tau + \nu v_\xi (w - \mu \frac{(1+\nu v)^2}{2} w_{\xi\xi} + \mu^2 \frac{(1+\nu v)^4}{4!} w_{\xi\xi\xi\xi}) - \frac{1}{\mu}(-\mu(1+\nu v) w_\xi + \mu^2 \frac{(1+\nu v)^3}{3!} w_{\xi\xi\xi}) = 0$$

Termos de ordem (t.o.s) superior são aqueles que possuem potências de ordem maior ou igual a dois nos parâmetros. Exemplos são μ^2 e $\mu\nu$. Se estes forem removidos a equação se torna:

$$v_\tau + \nu v_\xi w + (1+\nu v) w_\xi - \frac{\mu}{6} w_{\xi\xi\xi} (1+\nu v)^3 + (\text{t.o.s}) = 0$$

Utilizando a regra da derivada do produto, é possível escrever esse resultado de modo mais conciso na forma de

$$v_\tau + [(1+\nu v) w]_\xi - \frac{\mu}{6} w_{\xi\xi\xi} (1+\nu v)^3 = 0$$

Expandindo então a potência, obtêm-se

$$v_\tau + [(1+\nu v) w]_\xi - \frac{\mu}{6} w_{\xi\xi\xi} [1 + 3\nu v + 3(\nu v)^3 + (\nu v)^3] = 0$$

Então, como estão sendo desprezados os termos de ordem superior, resta apenas

$$v_\tau + [(1+\nu v) w]_\xi - \frac{\mu}{6} w_{\xi\xi\xi} = 0$$

Fazendo o mesmo com a terceira equação, é possível realizar simplificações análogas. Já se tem o valor de Φ_ξ e Φ_ζ, assim ainda falta calcular Φ_τ. Como a única dependência com relação a τ é a função $f(\xi, \tau)$, a derivada será

$$\Phi_\tau = f_\tau - \mu \frac{\zeta^2}{2} f_{\xi\xi\tau} + \mu^2 \frac{\zeta^4}{4!} f_{\xi\xi\xi\xi\tau} - ...$$

Substituindo esses valores na terceira equação, tem-se que

$$f_\tau - \mu \frac{\zeta^2}{2} f_{\xi\xi\tau} + \mu^2 \frac{\zeta^4}{4!} f_{\xi\xi\xi\xi\tau} + \frac{1}{2}\nu \left[f_\xi - \mu \frac{\zeta^2}{2} f_{\xi\xi\xi} + \mu^2 \frac{\zeta^4}{4!} f_{\xi\xi\xi\xi\xi} \right]^2 + \frac{1}{2}\frac{\nu}{\mu} \left[-\mu\zeta f_{\xi\xi} + \mu^2 \frac{\zeta^3}{3!} f_{\xi\xi\xi\xi} \right]^2 + v = 0$$

Removendo os termos de ordem menor para simplificar, expandindo ζ para seu valor na condição de contorno e fazendo a substituição $w = f_\xi$, a equação se torna

$$f_\tau - \mu\frac{(1+\nu v)^2}{2}w_{\xi\tau} + \frac{1}{2}\nu w^2 + v = 0$$

Expandindo as multiplicações e potências de $(1+\nu v)$, a equação é, ainda, simplificada para

$$f_\tau - \mu\frac{1+2\nu v+(\nu v)^2}{2}w_{\xi\tau} + \frac{1}{2}\nu w^2 + v = 0$$

Removendo os termos de ordem superior,

$$f_\tau - \frac{\mu}{2}w_{\xi\tau} + \frac{1}{2}\nu w^2 + v = 0$$

A fim de evitar que haja f e w na equação, é possível derivá-la com relação a ξ, de modo que se torne

$$w_\tau - \frac{\mu}{2}w_{\xi\xi\tau} + \nu w w_\xi + v_\xi = 0$$

Assim, a partir das condições de contorno para as ondas na superfície é possível afirmar que as ondas obedecem o seguinte sistema:

$$\begin{cases} w_\tau - \frac{\mu}{2}w_{\xi\xi\tau} + \nu w w_\xi + v_\xi = 0 \\ v_\tau + w_\xi + \nu(vw)_\xi - \frac{\mu}{6}w_{\xi\xi\xi} = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

Para resolvê o sistema, serão procuradas soluções na forma de

$$w = v + \nu A(v) + \mu B(v)$$

Em que A e B são funções de v e de suas derivadas com relação a ξ. Assim, primeiro é necessário fazer essa substituição no sistema (3.14), assim, este se torna:

$$\begin{cases} (v+\nu A+\mu B)_\tau - \frac{\mu}{2}(v+\nu A+\mu B)_{\xi\xi\tau} + \nu(v+\nu A+\mu B)(v+\nu A+\mu B)_\xi + v_\xi = 0 \\ v_\tau + (v+\nu A+\mu B)_\xi + \nu(v(v+\nu A+\mu B))_\xi - \frac{\mu}{6}(v+\nu A+\mu B)_{\xi\xi\xi} = 0 \end{cases}$$

Com essa substituição, no entanto, surgiram diversos termos de ordem superior. Assim, desconsiderando-os, a equação pode ser reescrita como

$$\begin{cases} v_\tau + \nu A_\tau + \mu B_\tau - \frac{\mu}{2}v_{\xi\xi\tau} + \nu v v_\xi + v_\xi = 0 \\ v_\tau + v_\xi + \nu A_\xi + \mu B_\xi + \nu 2 v v_\xi - \frac{\mu}{6}v_{\xi\xi\xi} = 0 \end{cases}$$

Para facilitar a escrita, é possível colocar em evidência os parâmetros μ e ν, de modo que a equação se torna:

$$\begin{cases} v_\tau + v_\xi + \nu(A_\tau + v v_\xi) + \mu(B_\tau - \frac{1}{2}v_{\xi\xi\tau}) = 0 \\ v_\tau + v_\xi + \nu(A_\xi + 2 v v_\xi) + \mu(B_\xi - \frac{1}{6}v_{\xi\xi\xi}) = 0 \end{cases}$$

Caso seja feita a escolha $A = \frac{-v^2}{4}$ e $B = \frac{v_{\xi\xi}}{3}$, as equações se tornam

$$\begin{cases} v_\tau + v_\xi + \nu((-\frac{v^2}{4})_\tau + vv_\xi) + \mu((\frac{v_{\xi\xi}}{3})_\tau - \frac{1}{2}v_{\xi\xi\tau}) = 0 \\ v_\tau + v_\xi + \nu((-\frac{v^2}{4})_\xi + 2vv_\xi) + \mu((\frac{v_{\xi\xi}}{3})_\xi - \frac{1}{6}v_{\xi\xi\xi}) = 0 \end{cases}$$

Expandindo as derivadas do que antes era A e B, o sistema se torna

$$\begin{cases} v_\tau + v_\xi + \nu(-\frac{1}{2}vv_\tau + vv_\xi) + \mu(\frac{1}{3}v_{\xi\xi\tau} - \frac{1}{2}v_{\xi\xi\tau}) = 0 \\ v_\tau + v_\xi + \nu(-\frac{1}{2}vv_\xi + 2vv_\xi) + \mu(\frac{1}{3}v_{\xi\xi\xi} - \frac{1}{6}v_{\xi\xi\xi}) = 0 \end{cases}$$

Simplificando as equações para torná-las mais concisas, elas são simplificadas até

$$\begin{cases} v_\tau + v_\xi + \nu(-\frac{1}{2}vv_\tau + vv_\xi) - \frac{1}{6}\mu v_{\xi\xi\tau}) = 0 \\ v_\tau + v_\xi + \frac{3}{2}\nu vv_\xi + \frac{1}{6}\mu v_{\xi\xi\xi} = 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

A partir disso, é nítido que os termos de ordem 0 com relação aos parâmetros μ e ν são iguais em ambas as equações. Logo, vale a relação

$$v_\tau = -v_\xi + O(\nu, \mu)$$

Isso é o mesmo que afirmar que as equações são compatíveis até a primeira ordem nos parâmetros, ou seja, descrevem aproximadamente os mesmos fenômenos. Portanto, uma vez que são aproximações, considera-se que a segunda equação de (3.15) descreve o movimento. Assim, em sua forma adimensional, a equação de Kortweg-de Vries é

$$v_\tau + v_\xi + \frac{3}{2}\nu vv_\xi + \frac{1}{6}\mu v_{\xi\xi\xi} = 0 \tag{3.16}$$

Agora, lembrando as definições de τ, v, ξ, ν e μ; é possível retornar às variáveis originais. Para isso, primeiro será feita a substituição dos parâmetros. Assim, a equação se torna:

$$v_\tau + v_\xi + \frac{3}{2}\frac{a}{h_0}vv_\xi + \frac{1}{6}\frac{h_0^2}{\lambda^2}v_{\xi\xi\xi} = 0$$

Agora, substituindo as variáveis adimensionais de volta às dimensionais,

$$v_t \cdot t_0 + v_x \cdot \lambda + \frac{3}{2}\frac{a}{h_0}vv_x \cdot \lambda + \frac{1}{6}\frac{h_0^2}{\lambda^2}v_{xxx} \cdot \lambda^3 = 0$$

Agora, resta fazer a substituição de v por η. Antes disso, no entanto, será feita a simplificação $t_0 = \frac{\lambda}{c_0}$, o que permite que todos os termos sejam divididos por λ para que sejam simplificados.

$$\frac{\eta_t}{a} \cdot \frac{1}{c_0} + \frac{\eta_x}{a} + \frac{3}{2}\frac{a}{h_0}\frac{\eta\eta_x}{a^2} + \frac{1}{6}h_0^2\frac{\eta_{xxx}}{a} = 0$$

Assim, multiplicando todos os termos por $(c_0 \cdot a)$, a equação é ainda mais simplificada, se tornando:

$$\eta_t + c_0\eta_x + \frac{3}{2}\frac{c_0}{h_0}\eta\eta_x + \frac{1}{6}h_0^2c_0\eta_{xxx} = 0$$

Essa equação já representa a KdV, mas ela é mais utilizada de outra forma, com um sistema de coordenadas que se desloca em relação ao solo. A fim de obter essa outra forma, é introduzida a função $u(t,x) = \eta(t, x + c_0 t)$. Com isso, por mais que a derivada com relação a x se mantenha a mesma, passa a haver uma diferença na derivada com relação ao tempo devido à regra da cadeia. Assim, definindo $r = x + c_0 t$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t}$$

Com isso, nota-se a derivada de u com relação a t pode ser escrita como

$$u_t = \eta_t + \eta_r \cdot c_0$$

Agora, redefine-se r como x, sendo este agora um novo referencial móvel. Como já foi discutido, não há alterações nas derivadas com relação a r e ao x original nos termos que não envolvem o tempo. Assim, a derivada temporal será reescrita como

$$u_t = \eta_t + \eta_x c_0$$

Logo, pode-se suprimir o segundo termo da equação na derivada temporal, de modo que a equação se torne:

$$u_t + \frac{3}{2}\frac{c_0}{h_0} u u_x + \frac{c_0 h_0^2}{6} u_{xxx} = 0 \tag{3.17}$$

3.5.1 Solução da KdV

Para buscar agora uma solução à KdV, primeiro serão tomadas algumas considerações. Primeiro, se $u(t,x) = g(x - ct)$, em que $s = x - ct$, deve ser verdade que eventualmente ela decai, como foi evidenciado por Scott Russell, a primeira pessoa a documentar um sóliton. Assim, deve seguir que

$$\lim_{s \to \pm\infty} g(s) = \lim_{s \to \pm\infty} g'(s) = 0 \tag{3.18}$$

Para a KdV, considere que $g(s)$ será escrita como $h_0 f(x - ct)$. Calculando suas derivadas, se $u = h_0 f(x - ct)$,

$$u_t = -h_0 c f'(s) \ , \ u_x = h_0 f'(s) \ , \ u_{xxx} = h_0 f'''(s)$$

Assim, a equação (3.17) pode ser reescrita como

$$-h_0 c f' + \frac{3}{2}\frac{c_0}{h_0} h_0 f \cdot h_0 f' + \frac{c_0 h_0^2}{6} h_0 f''' = 0$$

reorganizando os termos e dividindo por $h_0 c_0$, pode-se reescrevê-la como

$$\frac{1}{6} h_0^2 f''' + \frac{3}{2} h_0 f f' - \frac{c}{c_0} f' = 0$$

a não linearidade por ser reescrita como uma derivada, uma vez que $2ff' = (f^2)'$. Assim,

$$\frac{1}{6}h_0^2 f''' + \frac{3}{4}(f^2)' - \frac{c}{c_0}f' = 0$$

Uma vez que todas as funções estão sendo derivadas, é possível reescrever isso tudo como uma única derivada. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{6}h_0^2 f'' + \frac{3}{4}(f^2) - \frac{c}{c_0}f\right] = 0$$

Como a derivada é igual a zero, pode-se afirmar que a expressão dentro dos colchetes é constante. Assim,

$$\frac{1}{6}h_0^2 f'' + \frac{3}{4}(f^2) - \frac{c}{c_0}f = A$$

Essa constante A, no entanto, tem seu valor igual a zero. Isso fica claro pelos limites (3.18), de modo que a equação pode ser reescrita como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\lim_{s\to\pm\infty}(\frac{1}{6}h_0^2 f') + \lim_{s\to\pm\infty}[\frac{3}{4}(f^2)] - \lim_{s\to\pm\infty}[\frac{c}{c_0}f] = A$$

O que dá o valor de A:

$$0 = A$$

Então, a equação encontrada pode ser multiplicada por 4f', de modo que a equação se torna

$$\frac{2}{3}h_0^2 f'' f' + 3f^2 f' - \frac{c4}{c_0}ff' = 0$$

Fazendo o mesmo uso da derivada de potências para se livrar das não linearidades, a equação pode ser reescrita como

$$\frac{1}{3}h_0^2[(f')^2]' + (f^3)' - \frac{c2}{c_0}(f^2)' = 0$$

Como há derivadas em todos os termos, colocando-a em evidência a equação se torna

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{1}{3}h_0^2(f')^2 + f^3 - \frac{c2}{c_0}f^2\right] = 0$$

Novamente, como a derivada é igual a zero, o termo de dentro deve ser constante. Logo,

$$\frac{1}{3}h_0^2(f')^2 + f^3 - \frac{c2}{c_0}f^2 = B$$

Tirando o limite novamente, percebe-se que $B = 0$, uma vez que o limite para todo f e f' vai para zero quando $s \to \infty$. Com isso, isolando a derivada e definindo $\alpha = \frac{2c}{c_0}$, percebe-se que

$$\frac{1}{3}h_0^2 = \alpha f^2 - f^3$$

O lado direito pode ser reescrito como

$$\frac{h_0^2}{3}(f')^2 = f^2(\alpha - f)$$

Assim, basta solucionar essa equação diferencial para obter uma solução à KdV. Primeiro, será isolada a derivada e a equação será reescrita com as derivadas explicitas:

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\right)^2 = f^2(\alpha - f)\frac{3}{h_0^2}$$

Tirando a raiz de ambos os lados da equação, ela pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\right) = f\sqrt{(\alpha - f)}\frac{\sqrt{3}}{h_0}$$

Assim, é possível resolver essa equação agora pela separação de variáveis. Agrupando tudo que envolve f do lado esquerdo, e o resto à direita:

$$\frac{1}{f\sqrt{(\alpha - f)}}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \frac{\sqrt{3}}{h_0}$$

Agora, é possível integrar ambos os lados com relação a $\mathrm{d}s$, de modo que a equação se torne

$$\int \frac{1}{f\sqrt{(\alpha - f)}}df = \int \frac{\sqrt{3}}{h_0}ds$$

O lado direito é trivial a solução mas, ao lado esquerdo, a solução é menos óbvia. Primeiro, colocando α em evidência

$$\int \frac{1}{\sqrt{\alpha}f\sqrt{1 - \frac{f}{\alpha}}}df = \frac{\sqrt{3}}{h_0}s + \beta$$

Fazendo a substituição de variáveis $\frac{f}{\alpha} = sech^2(t)$, o jacobiano dessa transformação pode ser escrito como $df = 2\alpha sech(t)^2 tanh(t)dt$. Com isso, substituindo na equação

$$\int \frac{2\alpha sech^2(t)tanh(t)}{\alpha^{3/2}sech^2(t)\sqrt{1 - sech^2(t)}}dt = \frac{\sqrt{3}}{h_0}s + \beta$$

Então, pode-se considerar a relação entre a secante hiperbólica e a tangente hiperbólica para simplificar a integral. De fato, como $1 - sech^2(t) = tanh^2(t)$ a integral pode ser reescrita como:

$$\int \frac{2\alpha sech^2(t)tanh(t)}{\alpha^{3/2}sech^2(t)tanh(t)}dt = \frac{\sqrt{3}}{h_0}s + \beta$$

Simplificando o lado esquerdo e avaliando a integral, a equação se torna

$$\frac{2}{\sqrt{\alpha}}t = \frac{\sqrt{3}}{h_0}s + \beta$$

Isolando, pois, t nessa equação e considerando β a constante já multiplicada por $\frac{\sqrt{\alpha}}{2}$, a equação pode ser reescrita como

$$t = \frac{\sqrt{3\alpha}}{2h_0}s + \beta$$

Portanto, como t foi definido como sendo $\frac{f}{\alpha} = sech^2(t)$, sabendo-se t é possível escrever f. Assim:

$$f(s) = \alpha \cdot sech^2\left(\frac{\sqrt{3\alpha}}{2h_0}s + \beta\right)$$

Suponde que $\beta = 0$ e reintroduzindo as variáveis anteriores a partir da relação $\alpha = \frac{2c}{c_0}$ e $u = h_0 \cdot f$:

$$u(t,x) = h_0\frac{2c}{c_0}sech^2\left(\sqrt{\frac{6c}{c_0}}\frac{1}{2h_0}(x - ct)\right)$$

Agora, é mais simples denotar a equação por $u_0 = \frac{2ch_0}{c_0}$. Fazendo as substituições devidas

$$u(t,x) = u_0 sech^2\left(\frac{1}{h_0}\sqrt{\frac{3u_0}{4h_0}}(x - ct)\right)$$

Removendo da raiz os quadrados e substituindo c pelos demais termos da definição de u_0, a equação, enfim, se torna

$$u(t,x) = u_0 sech^2\left(\frac{1}{2h_0}\sqrt{\frac{3u_0}{h_0}}(x - \frac{u_0 c_0}{2h_0}t)\right)$$

Assim, possuindo a solução da equação, é possível observar seu gráfico, a fim de observar seu comportamento. Desse modo, é possível não só entender como se comporta um sóliton, assim como o que acontece quando eles se chocam. Ao plotar essa solução, com valores arbitrários positivos para as constantes, obtêm-se um gráfico semelhante a seguinte figura

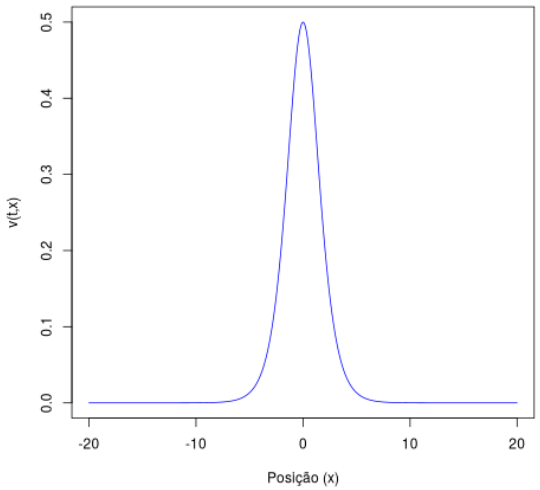
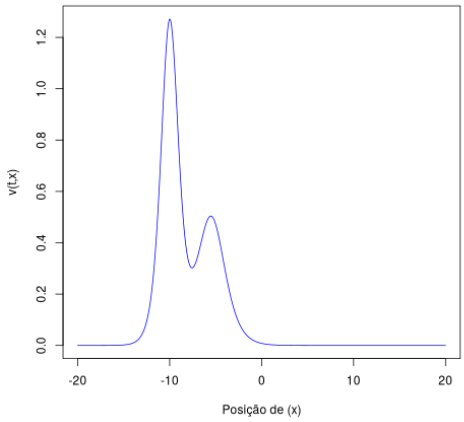
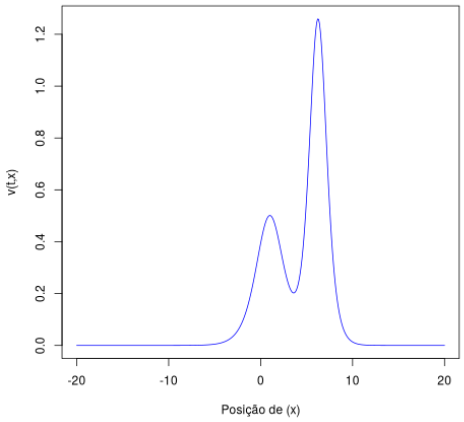


Figura 3.3: gráfico do sóliton

De fato, observa-se uma onda solitária localizada. No entanto, é mais interessante considerar o que ocorre com essa figura no caso em que ela se choca a outra e as interações que decorrem daí. Nesse caso, observa-se que os sólitons possuem velocidade de fase distintas, o que é necessário para que a distância entre eles diminua. Após o choque, ambos continuam se movendo da mesma forma, sem que haja uma dispersão dessa onda, como se esperaria no regime de águas rasas.



(a) Sólitons antes do choque



(b) Sólitons após o choque

Figura 3.4: O choque entre dois sólitons pode ser visto na seguinte animação

3.5.2 Algumas propriedades da KdV

Exercício 3.1 (Escalonamento da KdV) Seja u(t,x) solução da Eq. (3.17). Determine os valores de λ, $\alpha \in \mathbb{R}$, para que $v(t,\xi)$ definida por $u(t,x) = \lambda v(t, \alpha x)$ seja solução de

$$v_t + 6vv_\xi + v_{\xi\xi\xi} = 0$$

Solução:

Primeiro, é proveitoso expandir as derivadas de v, para facilitar a observação da correlação entre v e u. Assim

$$\lambda v_t = u_t$$

$$\lambda^2 v v_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} = u u_x$$

$$\lambda v_{\xi\xi\xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^3 = u_{xxx}$$

Assim, substituindo na equação (3.17), esta se torna

$$\lambda v_t + \lambda^2 \frac{3}{2}\frac{c_0}{h_0} v v_\xi \alpha + \lambda \frac{c_0 h_0^2}{6} v_{\xi\xi\xi}\alpha^3 = 0$$

Dividindo ambos os lados por λ, tem-se que

$$v_t + \lambda \frac{3}{2}\frac{c_0}{h_0} v v_\xi \alpha + \frac{c_0 h_0^2}{6} v_{\xi\xi\xi}\alpha^3 = 0$$

No entanto, é desejado que a equação seja escrita como

$$v_t + 6vv_\xi + v_{\xi\xi\xi} = 0$$

Por isso, é necessário que λ e α sejam definidos segundo o seguinte sistema

$$\begin{cases} \lambda\alpha\frac{3c_0}{2h_0} = 6 \\ \frac{c_0 h_0^2}{6}\alpha^3 = 1 \end{cases}$$

Assim, considerando primeiro a segunda equação, basta isolar α para notar que este deve igualar

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{6}{c_0 h_0^2}}$$

Então, obtido o valor de α é possível primeiro isolar λ e então substituí-lo na primeira equação, de modo que

$$\lambda = 6 \cdot \frac{2h_0}{3c_0}\sqrt[3]{\frac{c_0 h_0^2}{6}}$$

Adicionando os termos dentro da raiz, é possível simplificar um pouco, deixando na forma final

$$\lambda = 4h_0\sqrt[3]{\frac{h_0^2}{6c_0^2}}$$

Assim, demonstrado que a equação pode ser reescrita desse modo, define-se novamente $x := \xi$, a fim de poder reescrevê-la como

$$v_t + 6vv_x + v_{xxx} = 0 \tag{3.19}$$

■

Exercício 3.2 (Conservação da massa, momento e energia) Seja v(t,x) solução de (3.19) e admita que as expressões abaixo sejam bem definidas.

$$M(t) = \int_{\mathbb{R}} v(t,x)dx, P(t) = \int_{\mathbb{R}} u^2(t,x), E(t) = \int_{\mathbb{R}} u^3 + \frac{(u_x)^2}{2}dx$$

Mostre que M, P e E são funções constantes. Elas são, portanto, grandezas que se conservam no tempo (e expressam, respectivamente, a conservação da massa, do momento e da energia).

Solução:

Para saber se essas grandezas são constantes, serão analisadas suas derivadas com relação ao tempo. Caso sejam iguais a zero, de fato serão constantes as grandezas. Assim, primeiro será calculada a massa da onda. Assim, a sua derivada com relação ao tempo será

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M(t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} v(t,x)dx$$

Como está derivando com relação ao tempo e integrando em relação ao espaço, é possível inverter sua ordem, que permite a troca da ordem de operações. Assim, pode ser reescrito como

$$M_t(t) = \int_{\mathbb{R}} v_t(t,x)dx$$

Assim, deseja-se provar que a derivada de v com relação ao tempo é limitada. A única relação que se tem acerca dessa função é a própria KdV. Assim, integrando esta em $\mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} v_t + 6vv_x + v_{xxx}dx = 0$$

Sendo que é possível simplificar o termo do meio reescrevendo-o como a derivada de uma potência. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}} v_t + 3\partial_x(v)^2 + v_{xxx}dx = 0$$

Então, separa-se a equação em duas integrais, a fim de isolar a derivada de v com relação ao tempo. Assim, ela se torna

$$\int_{\mathbb{R}} v_t dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x}(3v^2 + v_{xx})dx = 0$$

Na segunda integral, há a derivada com relação ao espaço de $(3v^2+v_{xx})$ sendo integrado no espaço. Assim, pelo teorema fundamental do cálculo, é possível remover essa integral, de modo que

$$\int_{\mathbb{R}} v_t dx + \lim_{x\to a}\Big[3v^2 + v_{xx}\Big]_{-a}^{+a} = 0$$

Segundo o limite da equação (3.18), o limite de $3v^2$ é o mesmo que

$$\lim_{x\to\pm\infty} 3v^2 = 3 \cdot (\lim_{x\to\pm\infty} v)^2 = 0$$

Agora, v_{xx} é o mesmo que $\partial_x v_x$. Assim, considerando o que

$$\lim_{s\to\infty} v' = 0$$

Ao se considerar que a onda deve decair no infinto, uma vez que f e f' tem seus limites iguais a zero, faz sentido considerar que a segunda derivada também o será. Assim, é verdade que

$$\int_{\mathbb{R}} v_t dx = 0$$

Com isso, pode-se afirmar que há a conservação da massa, como foi descrito que deveria haver na dedução da equação de Stokes (seção 3.1), uma vez que ela é constante com relação ao tempo..

Quanto à conservação do momento, um raciocínio semelhante será tomado. Este é definido como

$$P(t) = \int_{\mathbb{R}} v^2(t,x)dx$$

Assim, para que ele se conserve, deseja-se encontrar que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t) = \int_{\mathbb{R}} \partial_t(v^2)dx = 0$$

Para simplificar, a derivada $\partial_t(v^2)$ pode ser reescrita como

$$\partial_t(v^2) = 2vv_t$$

Assim, deseja-se encontrar que

$$\int_{\mathbb{R}} vv_t dx = 0$$

Considerando a KdV, pode-se multiplicar todos os termos por v. Assim, a equação (3.19) se torna

$$vv_t + 6v^2v_x + vv_{xxx} = 0$$

Integrando com relação ao espaço, é o mesmo que escrever

$$\int_{\mathbb{R}} vv_t + 6v^2v_x + vv_{xxx}dx = 0$$

Primeiro será considerado o termo não linear $6v^2v_x$. Este pode ser reescrito na forma de

$$6v^2v_x = \partial_x(2v^3)$$

Com isso, a equação pode ser reescrita de modo a separar os três termos em 3 integrais. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}} vv_t dx + \int_{\mathbb{R}} \partial_x(2v^3)dx + \int_{\mathbb{R}} vv_{xxx}dx = 0$$

A partir do teorema fundamental do cálculo, a segunda derivada pode ser excluída resultando em um limite. Assim, como descrito por (3.18),

$$\lim_{a\to\infty} 2v^3\Big|_{-a}^{+a} = 0$$

Por fim, a terceira integral também deve ser resolvida. Para isso, reescreve-se a expressão como

$$vv_{xxx} = \partial_x\left[(vv_{xx}) - \frac{(v_x)^2}{2}\right]$$

Pode-se observar que a expressão é verdadeira uma vez que expandindo-a, encontra-se que

$$vv_{xxx} = v_xv_{xx} + vv_{xxx} - v_xv_{xx}$$

Então, é possível remover esse termo da integral também, transformando-o em um limite. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}} vv_{xxx} = \lim_{a\to\infty}\left[vv_{xx} - \frac{v_x^2}{2}\right]_{-a}^{+a}$$

A partir do limite já definido da derivada de v, é possível definir que o limite de v_x^2 é zero. Agora, quanto ao termo vv_{xx}, ele pode ser reescrito como

$$vv_{xx} = \partial_x(vv_x) - v_x^2$$

Substituindo na equação,

$$\lim_{a\to\infty}\left[\partial_x(vv_x) - v_x^2\right]_{-a}^{+a}$$

Como já foi observado, o limite de v_x^2 é zero e, portanto, esse termo sai da equação. Por fim, ao reescrever vv_x como

$$vv_x = \partial_x\frac{v^2}{2}$$

O limite se torna, então

$$\lim_{a\to\infty}\left[\partial_x\left(\partial_x\frac{v^2}{2}\right)\right]_{-a}^{+a}$$

Devido ao perfil da onda de decaimento, é possível dizer que esse limite também deve igualar a zero, uma vez que o limite de $\frac{v^2}{2}$ também decai. Assim, demostra-se também que o momento dessa onda é constante, também como era esperado a partir de sua dedução.

Por fim, a energia da onda pode ser calculada como

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}} v^3 + \frac{v_x^2}{2}dx$$

Assim, para saber se é constante esse valor, deve-se ter

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} v^3 + \frac{v_x^2}{2}dx = 0$$

Ou, expandindo esses termos,

$$\int_{\mathbb{R}} 3v^2 v_t + v_x v_{xt}dx = 0$$

O termo $v_x v_{xt}$ pode ser integrado por partes com relação a x, de modo a transformá-lo. De fato,

$$\int v_x v_{xt}dx = \left[v_t \cdot v_x\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int v_t \cdot v_{xx}$$

Assim, busca-se encontrar

$$\int v_t(3v^2 + v_{xx})dx$$

Primeiro, considera-se a expressão para a KdV mas inclui uma derivada com relação ao espaço. Assim, ela é escrita como

$$v_t + \partial_x(v_{xx} + 3v^2) = 0$$

Então, multiplica-se pelo argumento da derivada a equação inteira e integra-a em relação ao espaço, de modo a se obter

$$\int_{\mathbb{R}} v_t(v_{xx} + 3v^2)dx + \int_{\mathbb{R}} \partial_x(v_{xx} + 3v^2)\cdot(v_{xx} + 3v^2)dx = 0$$

Considerando a primeira integral, ela corresponde ao termo que deseja-se encontrar e, por tanto, será mantida como está. Quanto a segunda, esta deve ser trabalhada para encontrar seu valor. Assim, chamando $(v_{xx} + 3v^2)$ de f, é possível reescrever essa integral como

$$\int_{\mathbb{R}} f_x \cdot f dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_x \frac{f^2}{2}dx$$

Portanto, a partir do teorema fundamental do cálculo, encontra-se que na verdade essa integral corresponde ao limite

$$\lim_{a\to\infty}(v_{xx}+3v^2)\Big|_{-a}^{+a}=0$$

Como já foi discutido antes, esse limite é zero, a partir das propriedades da KdV. Portanto, é verdade que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)=0$$

Assim, provou-se que a massa, momento e energia se conservam nas ondas da KdV. ■

Exercício 3.3 (Reescrita da solução como uma derivada) Seja $v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$v(t,x)=\frac{c}{2}sech^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct)+\theta\right)$$

que, como vimos, é um sóliton para a equação (3.19), isto é, uma solução espacialmente localizada, cujo perfil não se altera com o passar do tempo. Mostre que $v(t,x)$ pode ser expressa na forma

$$v(t,x)=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\ln(1+ae^{\sqrt{c}(x-ct)})]$$

onde $a=e^{2\theta}$

Solução:

Primeiro, para verificar a correspondência entre essas duas equações é necessário expandir a derivada que está sendo aplicada sobre o logaritmo. De fato,

$$v(t,x)=2\frac{\partial}{\partial x}\frac{a\sqrt{c}e^{\sqrt{c}(x-ct)}}{1+ae^{\sqrt{c}(x-ct)}}$$

Para simplificar a notação, define-se $k=\sqrt{c}(x-ct)$. Assim, aplicando a segunda derivada, a equação se torna

$$v(t,x)=2a\sqrt{c}\frac{\sqrt{c}e^k\cdot(1+ae^k)-e^k\cdot(\sqrt{c}ae^k)}{(1+ae^k)^2}$$

Assim, simplificam-se os termos $e^k(a\sqrt{c}e^k)$, de modo que o que sobra nessa equação é

$$v(t,x)=\frac{2ace^k}{(1+ae^k)^2}$$

Então, define-se $e^w=a\cdot e^k$. Para que seja possível simplificar a equação com ele, ele é colocado em evidência no numerador e denominador

$$v(t,x)=\frac{2ce^w}{e^w\cdot(e^{-w/2}+e^{w/2})^2}$$

Simplificando, essa equação é o equivalente a se escrever

$$v(t,x) = \frac{2c}{(e^{-w/2} + e^{w/2})^2}$$

Relembrando a definição da sech, esta é o inverso de cosh. Logo,

$$v(t,x) = sech\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{2}{e^{w/2} + e^{-w/2}}$$

Então, isso pode ser reescrito na forma que se encontrou da derivada do logaritmo ao multiplicá-la por $\frac{c}{2}$. De fato,

$$v(t,x) = \frac{c}{2}sech^2\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{c}{2}\left(\frac{4}{(e^{w/2} + e^{-w/2})^2}\right) = \frac{2c}{(e^{w/2} + e^{-w/2})^2}$$

Assim, de fato o logaritmo é equivalente a uma secante hiperbólica. Assim, retornando às variáveis originais, $w = k + \ln(a) = \sqrt{c}(x - ct) + 2\theta$

$$v(t,x) = \frac{c}{2}sech^2\left(\frac{\sqrt{c}(x-ct) + 2\theta}{2}\right) = \frac{c}{2}sech^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct) + \theta\right)$$

■

Capítulo 4

Ciência dos materiais

Introdução

Os materiais sólidos utilizados em engenharia apresentam comportamentos distintos quando submetidos a forças externas, e essa diversidade está diretamente relacionada à sua composição, à natureza das ligações químicas e à forma como seus átomos se organizam internamente. A aplicação de uma carga externa gera forças internas distribuídas ao longo do material, caracterizadas como tensões, que podem provocar mudanças na forma e nas dimensões do corpo. Essas mudanças podem manifestar-se como deformações reversíveis, quando o material retorna à sua configuração original após a remoção da carga, ou como processos irreversíveis que culminam na falha estrutural.

4.1 Classificação e organização estrutural dos materiais

De maneira geral, os materiais de engenharia podem ser classificados em grandes classes, como metais, cerâmicos, polímeros e compósitos, cada uma delas apresentando combinações específicas de propriedades mecânicas, térmicas e elétricas. Essa classificação está intimamente ligada tanto à composição química quanto ao tipo de ligação predominante entre os átomos. Metais caracterizam-se pela ligação metálica e pela elevada capacidade de deformação plástica; polímeros apresentam ligações covalentes fortes ao longo das cadeias e ligações secundárias entre elas; cerâmicos, por sua vez, são majoritariamente formados por ligações iônicas e covalentes, o que lhes confere elevada rigidez e estabilidade química.

Além da classificação por classe de material, a organização atômica permite distinguir os sólidos em materiais cristalinos e materiais amorfos. Materiais cristalinos apresentam uma ordem periódica de longo alcance, na qual os átomos ocupam posições bem definidas e repetitivas no espaço, formando uma rede cristalina. Essa regularidade estrutural possibilita a definição de planos e direções cristalográficas e influencia diretamente a forma como as tensões se distribuem internamente.

Em contraste, materiais amorfos não apresentam periodicidade ao longo de grandes distâncias, embora possam exibir algum grau de ordenação local. A ausência dessa ordem cristalina modifica os mecanismos de deformação e fratura, resultando em comportamentos mecânicos distintos quando comparados aos materiais cristalinos.

4.2 Tensão, deformação e comportamento mecânico

A tensão normal (σ) é definida como a força aplicada por unidade de área da seção transversal do material:

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{4.1}$$

em que σ é a tensão normal, F é a força aplicada perpendicularmente à seção transversal e A é a área da seção transversal do material, como podemos ver na Figura 4.1.

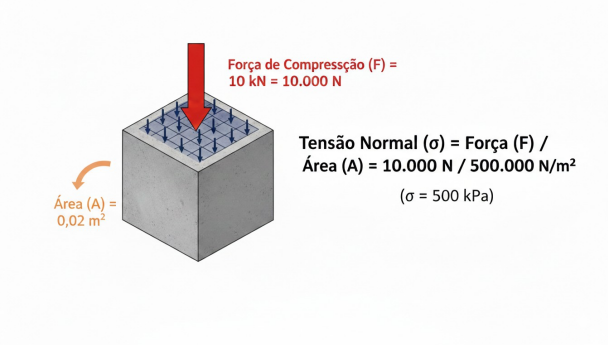


Figura 4.1: Representação da tensão normal atuando sobre a seção transversal do material.

A deformação normal (ε) representa a variação relativa do comprimento do material sob carregamento e é dada por:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \tag{4.2}$$

onde ε é a deformação normal, ΔL é a variação do comprimento e L_0 é o comprimento inicial do corpo, o que é exemplificado na Figura 4.2.

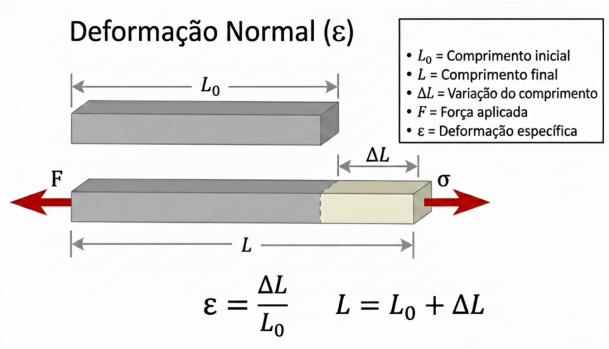


Figura 4.2: A deformação normal produzida em um corpo por uma tensão uniaxial.

Quando o material apresenta comportamento elástico linear, a relação entre tensão e deformação é descrita pela Lei de Hooke:

$$\sigma = E\,\varepsilon \tag{4.3}$$

sendo E o módulo de elasticidade do material, que expressa sua rigidez, σ a tensão aplicada e ε a deformação correspondente. Todas as equações acima se relacionam por meio desta lei, o que fica evidente na Figura 4.2. Enquanto essa relação é válida, a deformação é totalmente reversível após a remoção da carga.

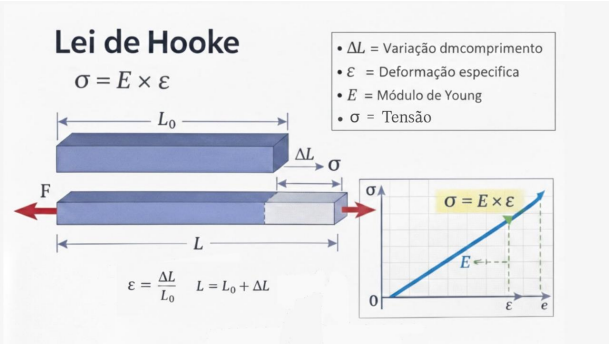


Figura 4.3: Lei de Hooke no regime elástico linear.

Em elementos estruturais submetidos à flexão, como vigas, a tensão normal varia ao longo da seção transversal e pode ser expressa por:

$$\sigma = \frac{My}{I} \tag{4.4}$$

em que σ é a tensão normal em um ponto da seção, M é o momento fletor atuante, y é a distância do ponto considerado ao eixo neutro da seção e I é o momento de inércia da área da seção transversal em relação ao eixo neutro.

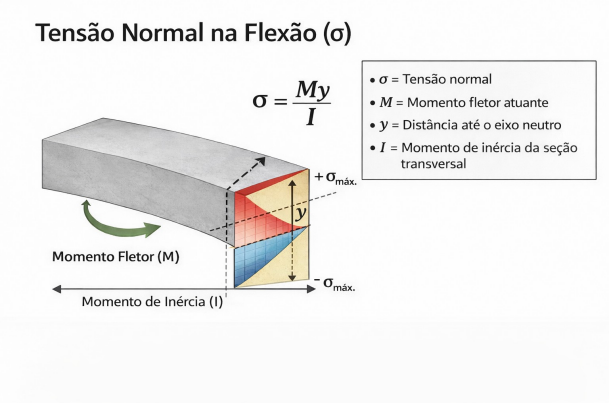


Figura 4.4: Distribuição da tensão normal na flexão: representação esquemática de uma viga submetida a momento fletor.

A deflexão (Δy) representa o deslocamento vertical de um ponto da viga sob carregamento. Para o caso clássico de uma viga simplesmente apoiada submetida a uma carga concentrada F no centro (ensaio de flexão em três pontos), a deflexão máxima é dada por:

$$\Delta y_{\text{máx}} = \frac{FL^3}{48EI} \tag{4.5}$$

em que $\Delta y_{\text{máx}}$ é a deflexão máxima no centro da viga, F é a carga aplicada, L é o comprimento entre os apoios, E é o módulo de elasticidade do material e I é o momento de inércia da seção transversal.

A seguir, apresenta-se a dedução da Equação (4.5), com base na teoria clássica de vigas.

Dedução da equação da deflexão máxima

Considera-se uma viga biapoiada submetida a uma carga concentrada F aplicada no centro do vão, de comprimento total L, conforme ilustrado na Figura 4.7. O comportamento é analisado no regime elástico linear, assumindo pequenas deflexões, segundo a teoria de vigas de Euler–Bernoulli.

A equação diferencial da linha elástica é dada por: (Veja: [**?**] ; Página 304)

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = M(x), \tag{4.6}$$

em que E é o módulo de elasticidade do material, I é o momento de inércia da seção transversal e $M(x)$ é o momento fletor na posição x.

Devido à simetria do carregamento, analisa-se apenas metade da viga, isto é,

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}.$$

As reações nos apoios são iguais,

$$R_A = R_B = \frac{F}{2}.$$

Assim, o momento fletor é dado por

$$M(x) = \frac{F}{2}x.$$

Substituindo em (4.6), obtém-se

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F}{2}x.$$

Integrando uma vez em relação a x,

$$EI\,\frac{dy}{dx} = \frac{F}{4}x^2 + C_1.$$

No centro da viga ($x = L/2$), a inclinação é nula em virtude da simetria, isto é,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L/2} = 0.$$

Logo,

$$0 = \frac{F}{4}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{FL^2}{16}.$$

Integrando novamente,

$$EI\,y = \frac{F}{12}x^3 - \frac{FL^2}{16}x + C_2.$$

No apoio ($x = 0$), a deflexão é nula, isto é,

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$

A deflexão máxima ocorre no centro da viga ($x = L/2$):

$$EI\,\Delta y_{\max} = \frac{F}{12}\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{FL^2}{16}\left(\frac{L}{2}\right).$$

Simplificando,

$$EI\,\Delta y_{\max} = \frac{FL^3}{96} - \frac{FL^3}{32} = -\frac{FL^3}{48}.$$

Considerando o valor absoluto da deflexão, obtém-se novamente a Equação (4.5):

$$\boxed{\Delta y_{\max} = \frac{FL^3}{48EI}.}$$

O momento de inércia (I) depende exclusivamente da geometria da seção transversal. Para uma seção retangular de base b e altura h, tem-se:

$$I = \frac{bh^3}{12} \tag{4.7}$$

4.3 Resistência, fratura e comportamento de materiais cerâmicos

O limite de resistência corresponde à tensão máxima que o material suporta antes da falha. Em materiais frágeis, essa falha ocorre predominantemente por fratura, sem deformação plástica significativa.

Em ensaios de flexão, a resistência à flexão (σ_f) pode ser determinada, para uma viga retangular em ensaio de três pontos, por:

$$\sigma_f = \frac{3FL}{2bh^2} \tag{4.8}$$

onde σ_f é a resistência à flexão, F é a carga no instante da fratura, L é o vão entre os apoios, b é a largura da seção transversal e h é a altura da seção transversal.

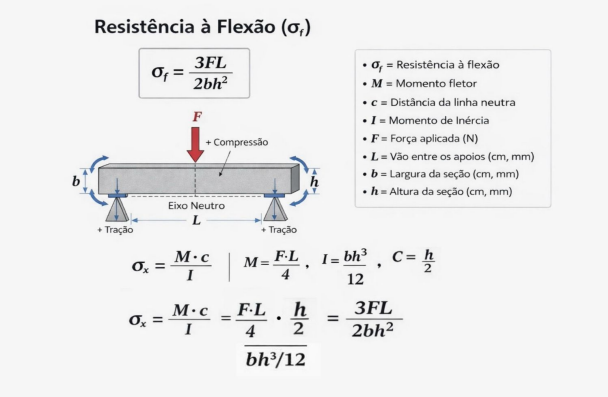


Figura 4.5: Representação esquemática do ensaio de flexão em três pontos e dedução da equação de resistência à flexão.

Para corpos de prova com seção transversal circular, a resistência à flexão pode ser expressa por:

$$\sigma_{rf} = \frac{F_f L}{\pi R^3} \tag{4.9}$$

em que σ_{rf} é a resistência à flexão, F_f é a carga aplicada no instante da fratura, L é a distância entre os pontos de apoio e R é o raio do corpo de prova.

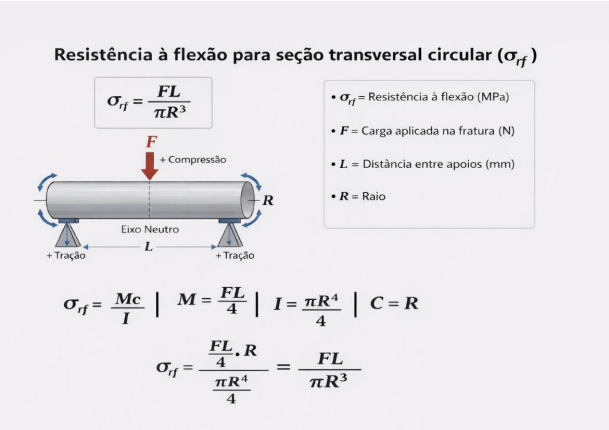


Figura 4.6: Representação esquemática do ensaio de flexão em três pontos e dedução da equação de resistência à flexão para corpo de prova com seção transversal circular.

A viscosidade (η) é definida como:

$$\eta = \frac{\tau}{\frac{dv}{dy}} \tag{4.10}$$

em que τ é a tensão de cisalhamento aplicada e $\frac{dv}{dy}$ representa o gradiente de velocidade em uma direção perpendicular ao escoamento.

4.3.1 Diferença entre deflexão e resistência à flexão

Embora os termos deflexão e resistência à flexão estejam relacionados ao comportamento de materiais submetidos a carregamentos flexionais, eles representam conceitos físicos distintos e descrevem aspectos diferentes da resposta mecânica do material.

A deflexão está associada ao deslocamento do elemento estrutural sob a ação de uma carga. Ela depende do regime elástico do material e está diretamente relacionada ao módulo de elasticidade E e à geometria da seção transversal, por meio do momento de inércia I. Dessa forma, a deflexão quantifica a rigidez do sistema estrutural e indica o quanto a estrutura se deforma enquanto permanece no regime elástico, sem ocorrência de dano permanente.

Por outro lado, a resistência à flexão está relacionada à capacidade do material de suportar tensões antes da fratura. Esse parâmetro corresponde à tensão máxima desenvolvida na seção transversal no instante da falha e depende tanto das propriedades intrínsecas do material quanto da presença de defeitos, como trincas e porosidade, especialmente relevantes em materiais frágeis como as cerâmicas.

A deflexão é um critério associado ao desempenho funcional e à rigidez estrutural, enquanto a resistência à flexão é um critério de falha. Assim, um material pode apresentar pequena deflexão sob carga (elevada rigidez) e, ainda assim, possuir baixa resistência à flexão, fraturando-se subitamente quando a tensão crítica é atingida.

Essa distinção é particularmente importante no estudo de materiais cerâmicos, que exibem comportamento predominantemente elástico até a fratura, com pequena deflexão prévia e ausência significativa de deformação plástica.

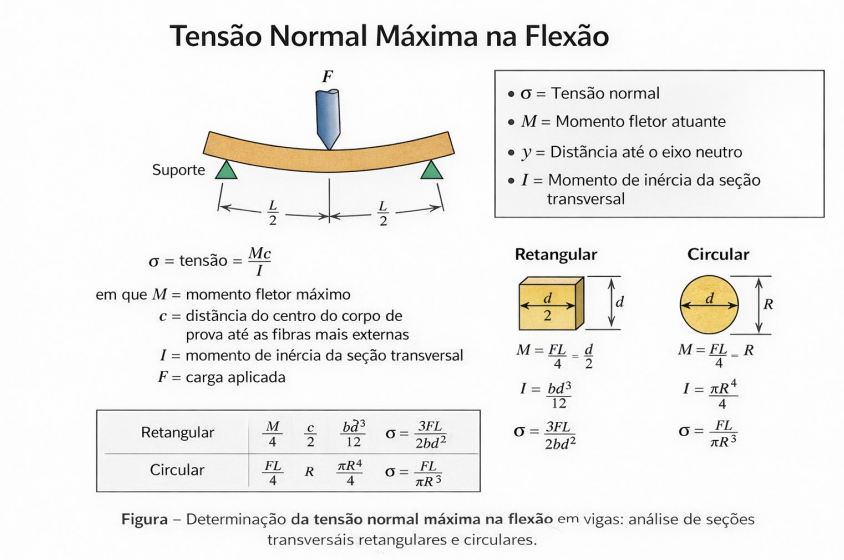


Figura 4.7: Um esquema da flexão a três pontos para a medição do comportamento tensão-deformação e da resistência à flexão de cerâmicas frágeis, incluindo as expressões para o cálculo da tensão para seções transversais retangulares e circulares. Callister. 9º Edição. 2016. Veja: [**?**]

Material	*Resistência à Flexão*		*Módulo de Elasticidade*	
	MPa	*ksi*		
	MPa	35–145	*GPa*	*10^6 psi*
Nitreto de silício (Si_3N_4)	250–1000	35–145	304	44
Zircônia* (ZrO_2)	800–1500	115–215	205	30
Carbeto de silício (SiC)	100–820	15–120	345	50
Óxido de aluminio (Al_2O_3)	275–700	40–100	393	57
Vitrocerámico (Piroceram)	247	36	120	17
Mulita ($3Al_2O_3$–$2SiO_2$)	185	27	145	21
Espinélio ($MgAl_2O_4$)	110–245	16–35,5	260	38
Óxido de magnésio (MgO)	130	19	156	23
Silica fundida (SiO_2)	110	16	73	11
Vidro sódocálcico	69	10	69	10

*Parcialmente estabilizada com 3 %mol Y_2O_3.
†Sinterizado e contendo aproximadamente 5% de porosidade.

Figura 4.8: Tabulação da Resistência à flexão (Módulo de Ruptura) e do módulo de elasticidade para dez materiais cerâmicos comuns. Callister. 9º Edição. 2016. Veja: [**?**]

Problema 4.1 É necessário selecionar um material cerâmico para ser submetido à tensão usando um dispositivo de aplicação de carga a três pontos (Figura 4.7). A amostra deve ter uma seção transversal circular e um raio de 3,8 mm (0,15 in), e não deve fraturar ou ter uma deflexão superior a 0,021 mm (8,5 × 10–4 in) no seu centro quando uma carga de 445 N (100 lbf) for aplicada. Se a distância entre os pontos de apoio é de 50,8 mm (2 in), quais, entre os materiais listados na Tabela 1 (Figura 4.8), são possíveis candidatos? A magnitude da deflexão no ponto central pode ser calculada usando a Equação (4.5).

Solução:

Dados do problema:

$$F = 445\,\text{N}, \qquad L = 50{,}8\,\text{mm}, \qquad R = 3{,}8\,\text{mm}, \qquad \Delta y_{\text{lim}} = 0{,}021\,\text{mm}.$$

Vamos começar verificando a resistência à flexão, para uma seção circular submetida a flexão a três pontos, a tensão máxima de tração é dada pela Figura 4.7.

$$\sigma_f = \frac{FL}{\pi R^3}.$$

Substituindo os valores,

$$\sigma_f = \frac{445 \cdot 50{,}8}{\pi \cdot (3{,}8)^3} = 131{,}36\,\text{MPa}.$$

Para que não ocorra fratura, deve-se ter

$$\sigma_f \leq \sigma_{\text{ruptura}}.$$

Assim, são eliminados os materiais cuja resistência à flexão seja inferior a 131 MPa (Figura 4.8).

Os materiais eliminados são:

$$\text{SiC}, \quad \text{MgAl}_2\text{O}_4, \quad \text{MgO}, \quad \text{SiO}_2, \quad \text{vidro sodocálcico}.$$

Agora, verificando a deflexão máxima, temos que o momento de inércia da seção circular é (Figura 4.7):

$$I = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Substituindo,

$$I = \frac{\pi (3{,}8)^4}{4} = 163{,}766\,\text{mm}^4.$$

A deflexão é dada por

$$\Delta y = \frac{FL^3}{48EI}.$$

Substituindo os valores constantes,

$$\Delta y = \frac{445 \cdot (50{,}8)^3}{48 \cdot 163{,}766 \cdot E}.$$

Calculando a deflexão para os materiais remanescentes:

$$\begin{aligned} E = 304\,\text{GPa} &\Rightarrow \Delta y = 0{,}024\,\text{mm} > 0{,}021\,\text{mm}, \\ E = 205\,\text{GPa} &\Rightarrow \Delta y = 0{,}036\,\text{mm} > 0{,}021\,\text{mm}, \\ E = 393\,\text{GPa} &\Rightarrow \Delta y = 0{,}018\,\text{mm} < 0{,}021\,\text{mm}. \end{aligned}$$

Concluímos que, o único material da tabela (Figura 4.7.) que satisfaz simultaneamente o critério de resistência à flexão e o critério de deflexão máxima admissível é

$$\boxed{\text{Óxido de alumínio } (Al_2O_3)}.$$

■

Referências Bibliográficas

[1] Boyce, W. E.; *Diprima, R. C. Elementary differential equations and boundary value problems.* Hoboken, Nj: Wiley, 2013.

[2] Callister, W. D.; Rethwisch, D. G. *Materials science and engineering: an introduction.* 10. ed. Hoboken, Nj: Wiley, 2018.

[3] Chorin, A. J.; Marsden, J. E. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics.* [s.l.] Springer, 2013.

[4] Gondar, J.L, Cipolatti, R.:*Iniciação a física matemática.*2º edição. 2018.

[5] Stewart, J. *Calculo Volume 2.* 7º edição. 2013